

Dynamic Games of Complete Information

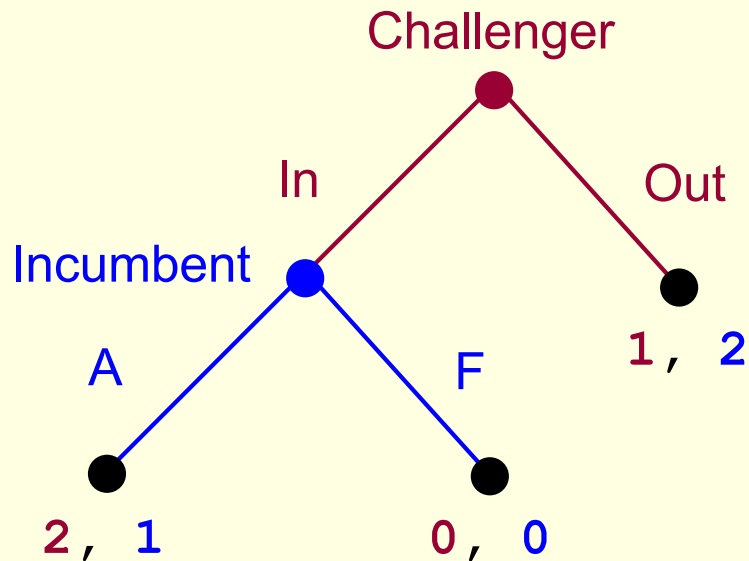
Subgame-Perfect Nash Equilibrium

Outline of dynamic games of complete information

- *Dynamic games of complete information*
- *Extensive-form representation*
- *Dynamic games of complete and perfect information*
- *Game tree*
- Subgame-perfect Nash equilibrium
- Backward induction
- Applications
- Dynamic games of complete and imperfect information
- More applications
- Repeated games

市场进入博弈 (Entry Game)

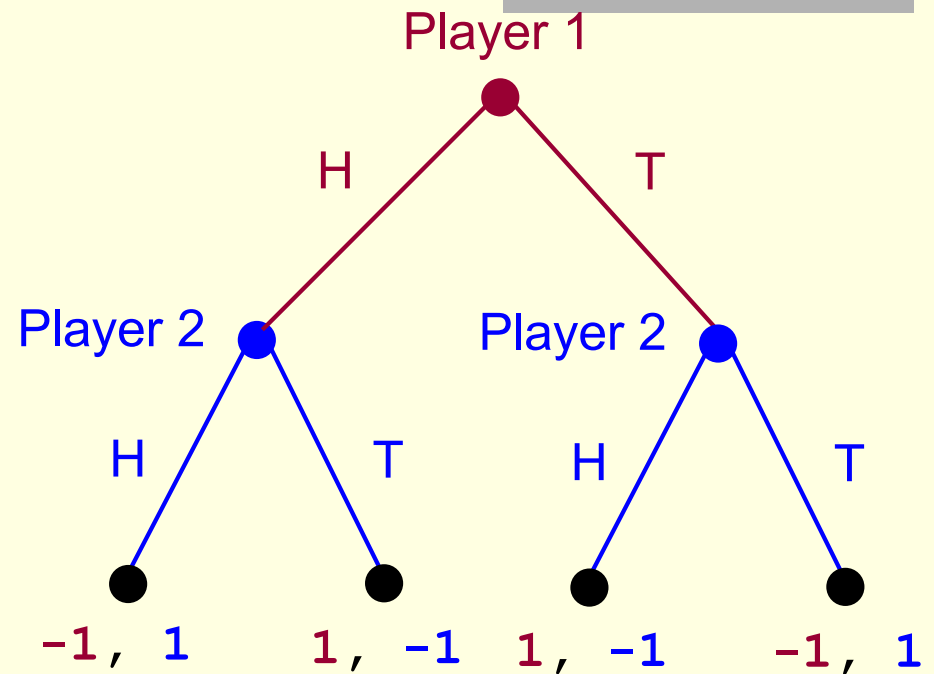
- 一个已进入市场的**垄断者 (incumbent)** 面临一个**挑战者 (challenger)** 可能的进入.
- **挑战者** 可能选择 **进入 (in)** 或者 **不进入 (out)** .
- 如果 **挑战者** 进入, 那么 **垄断者** 可以选择 **温和策略 (accommodate, A)** 或者 **激进策略 (to fight, F)** 。
- 收益是共同知识.



第一个数字是挑战者的收益.
第二个数字是垄断者的收益.

Sequential-move matching pennies

- 两个参与人各有一枚硬币.
- Player 1先选择是显示 Head 还是 Tail.
- 在观察player 1的选择之后, player 2选择显示Head或 Tail
- 两个参与人都知道以下规则:
 - 如果两枚硬币一致 (都是heads 或都是 tails) 那么player 2 赢得 player 1的硬币.
 - 否则, player 1赢得 player 2的硬币.



Dynamic (or sequential-move) games of complete information

- 一个参与人集合
- 谁先行动，可以采取什么行动？
- 当参与人行动时他们知道什么？
- 参与人的收益取决于他们的选择.
- 所有这些都是参与人的共同知识.

Definition: extensive-form representation

- 一个博弈的扩展式表述包括的要素：
 - 博弈中的参与者
 - 每个参与人在何时行动
 - 每次轮到某一参与者行动时，可供她选择的行动
 - 每次轮到某一参与者行动时，她所了解的信息
 - 每个参与者从她每个可选的行动组合中获得的收益

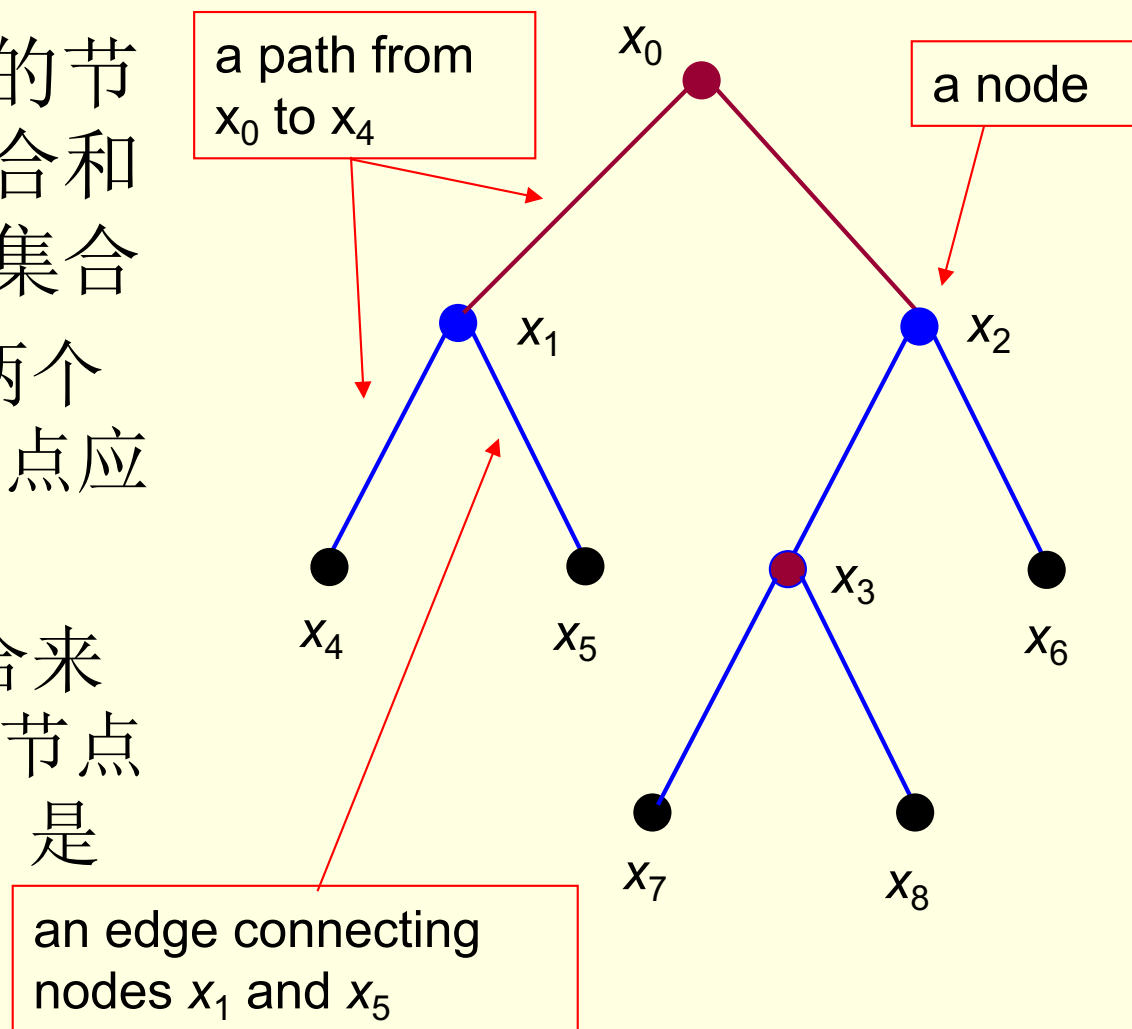
Dynamic games of complete and perfect information

- 完全且完美信息动态博弈的特点：
 - 行动是顺序发生的；
 - 在选择下一次行动前可以观察到所有以前的行动；
 - 每一可能的行动组合下参与者的收益都是共同知识。

- 例子：
 - 斯塔克尔贝里的双头垄断模型；
 - 里昂惕夫的有工会企业工资和就业模型。

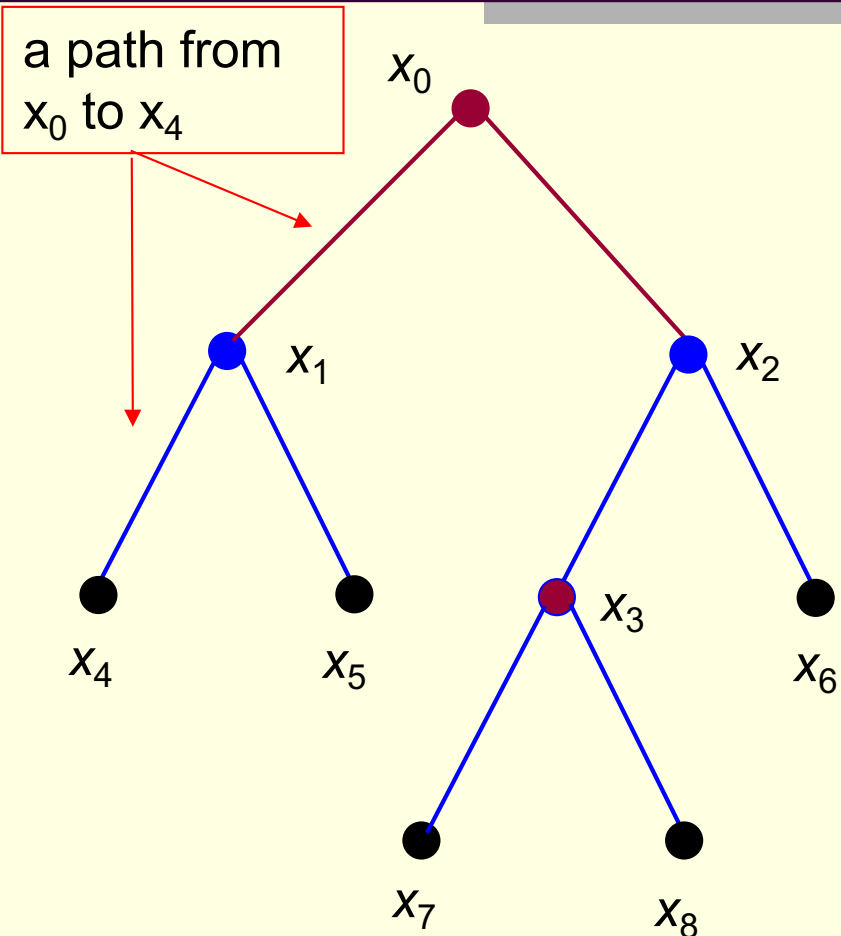
博弈树

- 博弈树包括这样的节点（**nodes**）集合和边缘（**edges**）集合
 - 每个边缘连接两个节点 (这两个节点应该是相连的)
 - 对任何节点组合来说, 连接这两个节点的路径（**path**）是唯一的



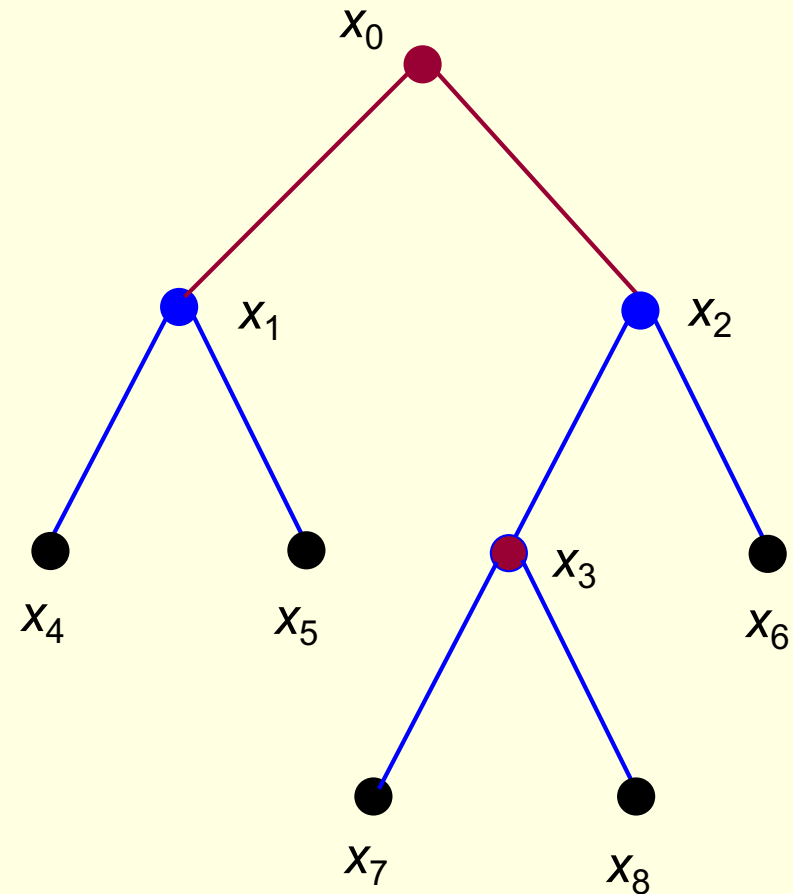
Game tree

- 路径是不同节点 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$ 的一个序列，其中对于 $i=1, 2, \dots, n-1$, y_i 和 y_{i+1} 相邻. 我们说这条路径是从 y_1 到 y_n .
- 我们也可以用这些节点推导出的边缘的序列来定义路径.
- 路径的长度 (*length*) 是路径中包含的边缘的数量.
- 例 1: x_0, x_2, x_3, x_7 是一条路径, 长度为3.
- 例 2: x_4, x_1, x_0, x_2, x_6 是一条路径, 长度为4.



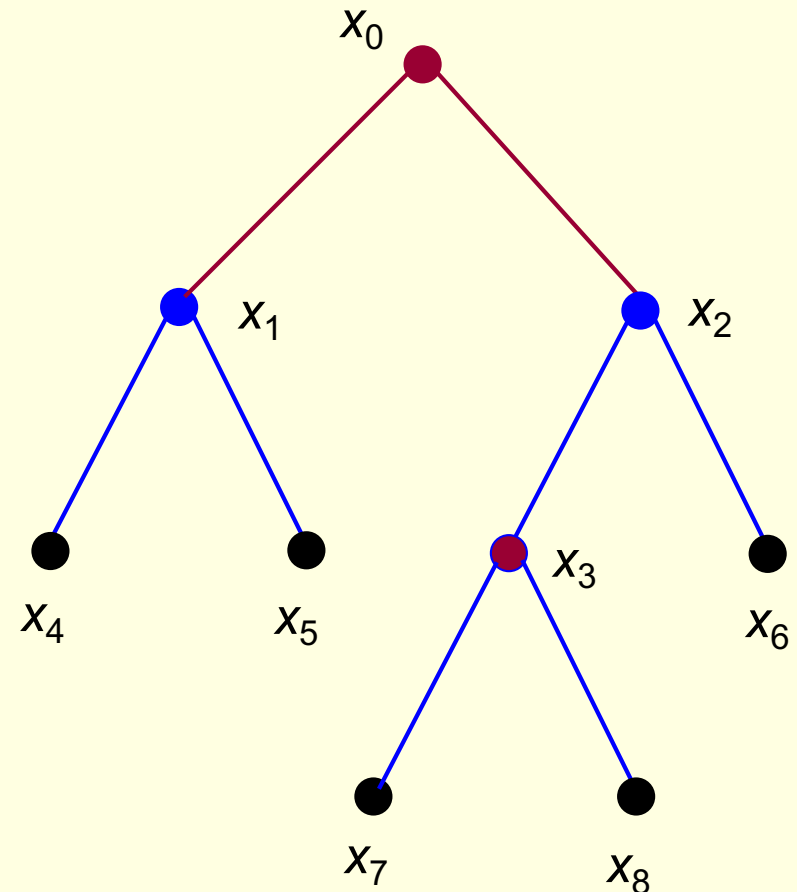
Game tree

- 博弈树中，博弈开始的节点 x_0 被称为根（*root*）
- 与 x_0 相邻的节点是 x_0 的后续节（*successors*）。 x_0 的后续节点是 x_1, x_2
- 对任何两个相邻的节点来说，与根相连接的路径更长的那个节点是另一个节点的后续节。
- 例3: x_7 是 x_3 的后续节点，因为它们相邻，而且 x_7 到 x_0 的路径比 x_3 到 x_0 的路径更长



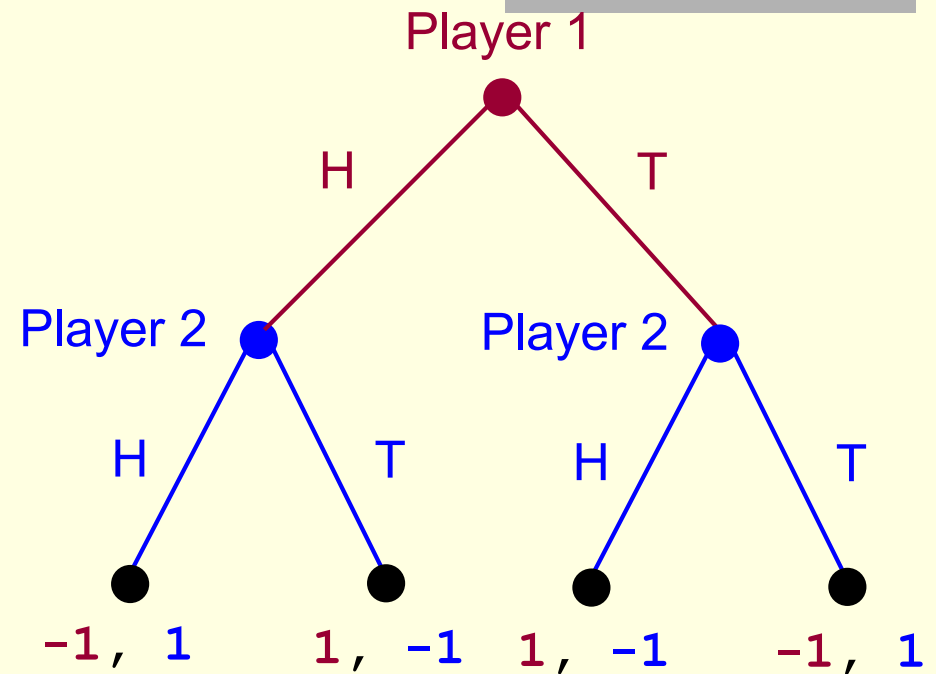
Game tree

- 如果 x 是另一个节点 y 的后续节，那么 y 被称为 x 的前续节（*predecessor*）。
- 在博弈树中，根以外的任何节点都有唯一的前续节。
- 没有后续节的所有节点被称为终点节（*terminal node*），它是博弈可能的终点
- 例4: x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 都是终点节



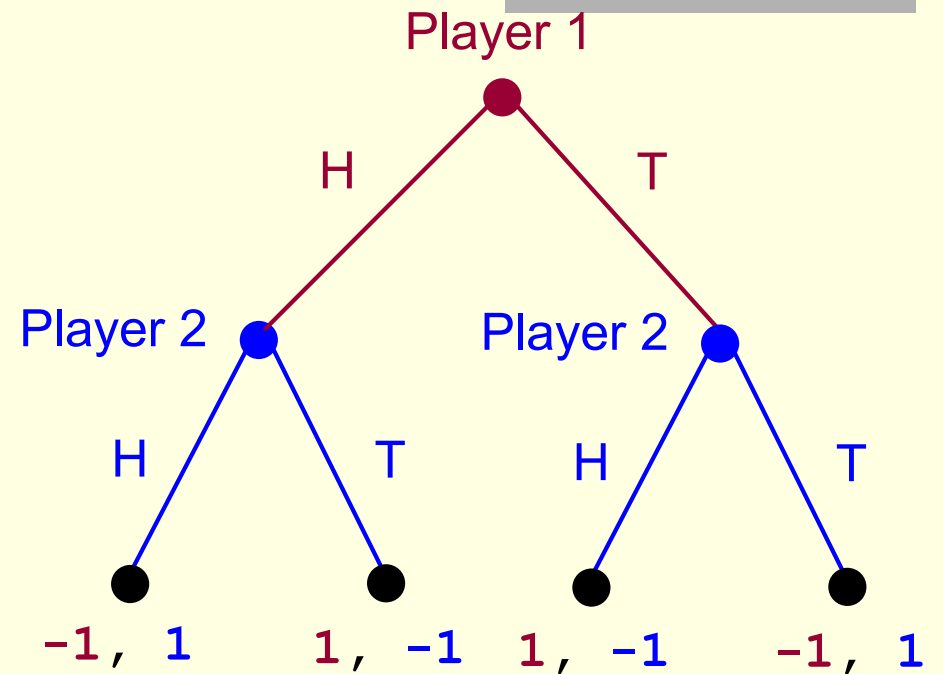
Game tree

- 除终点节以外的任何节点都代表了某个参与人.
- 对于终点节以外的任意节点来说, 连接它和它的后续节的边缘代表了这个人可能采取的行动



Game tree

- 从根到一个终点节的路径代表了一个完整的行动序列，它决定了终点节的收益



Strategy

- 参与人的一个策略是关于行动的一个完整计划。
- 它明确了在参与人可能会遇到的每一种情况下对可行行动的选择。

Strategy and payoff

- 在博弈树中, 参与人的策略用边缘的集合 (a **set of edges**) 来表述出来.
- 每个参与人的一个策略共同构成一个策略组合 (边缘的集合)。这个策略组合推导出从根到终点节的一条路径, 这决定了所有参与人的收益

Sequential-move matching pennies

■ Player 1的策略

- Head
- Tail

■ Player 2的策略

- H if player 1 plays H, H if player 1 plays T
- H if player 1 plays H, T if player 1 plays T
- T if player 1 plays H, H if player 1 plays T
- T if player 1 plays H, T if player 1 plays T

Player 2的策略分别用HH, HT, TH 和TT来表示.

Sequential-move matching pennies

■ 博弈的标准式表达

- {参与者1, 参与者2}
- 参与者1的策略集={H, T}
- 参与者2的策略集={HH, HT, TH, TT}
- 两个参与人的收益

		参与者 2			
		HH	HT	TH	TT
参与者 1	H	-1 , 1	-1 , 1	1 , -1	1 , -1
	T	1 , -1	-1 , 1	1 , -1	-1 , 1

Nash equilibrium

- 完全信息动态博弈中的纳什均衡集（**the set of Nash equilibrium**）就是它的标准式的纳什均衡集合。
- 怎样找到完全信息动态博弈的纳什均衡
 - 构建完全信息动态博弈的标准式
 - 在标准式中找到纳什均衡

Entry game

- Challenger的策略
 - In
 - Out
- Incumbent的策略
 - Accommodate (如果challenger选择In)
 - Fight (如果challenger选择In)
- 收益
- 标准式表述

		Incumbent	
		Accommodate	Fight
Challenger	In	2 , 1	0 , 0
	Out	1 , 2	1 , 2

Nash equilibria in entry game

- 两个纳什均衡
 - (In, Accommodate)
 - (Out, Fight)
- 第二个纳什均衡有意义吗?
- 不可置信的威胁 (Non-credible threats)

		Incumbent	
		Accommodate	Fight
Challenger	In	<u>2</u> , <u>1</u>	0 , 0
	Out	1 , <u>2</u>	<u>1</u> , <u>2</u>

不可置信的威胁 (non-credible threat)

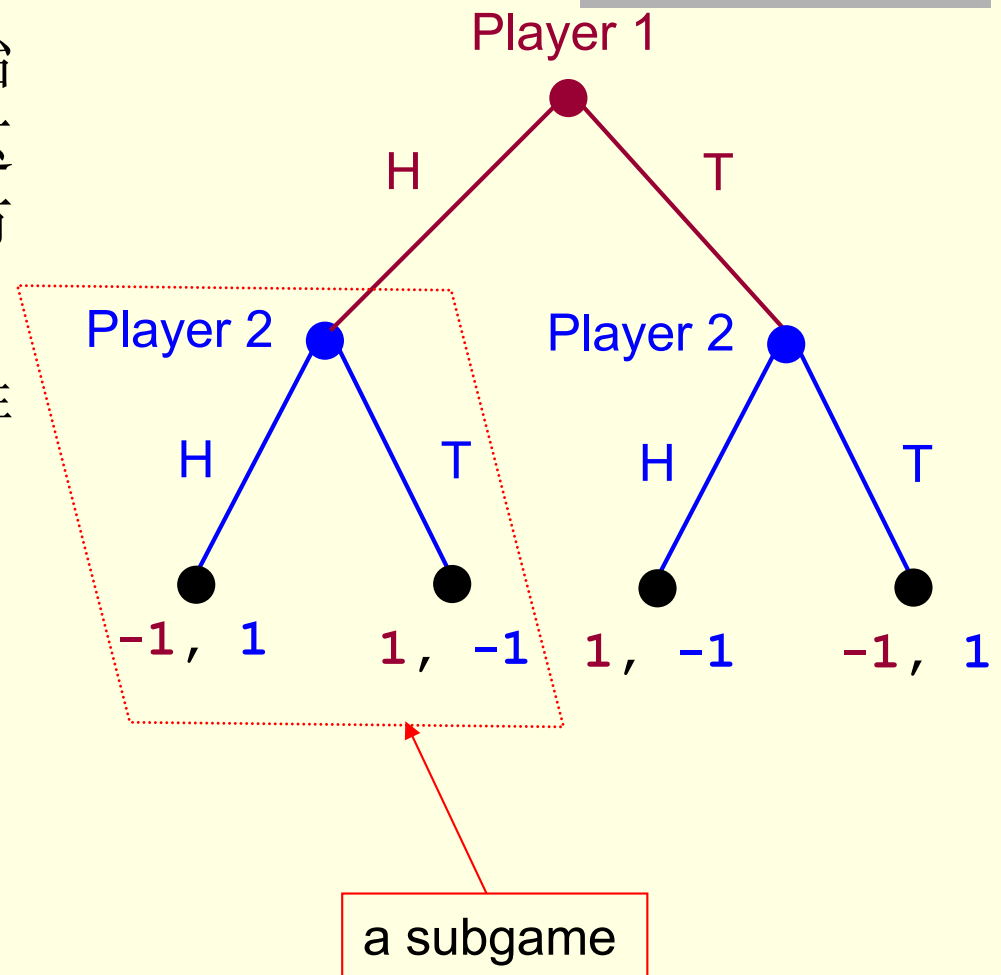
- 威胁可信性问题的根源是动态博弈中事前最优和事后最优的不一致性——动态不一致性。
- 1994年诺贝尔经济学奖获得者Reinhard J.R. Selten（泽尔滕）认为：在一个动态博弈中，如果参与人是理性的，他应该往前看，即不管是前制定的计划如何，他在新的时点上作决策都应该根据当前的情形选择最优的行动。
- 我们把动态博弈中的这种理性行为称为序贯理性（**sequential rationality**），它要求参与人在一个接一个的决策节点上都要选择最优行动。

去掉不合理的纳什均衡

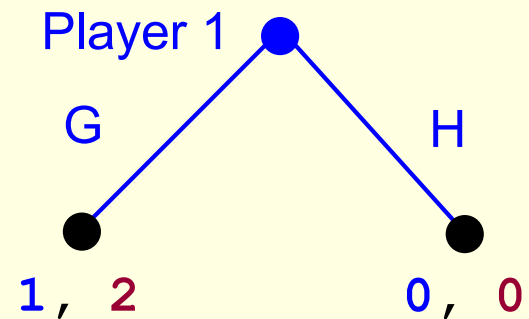
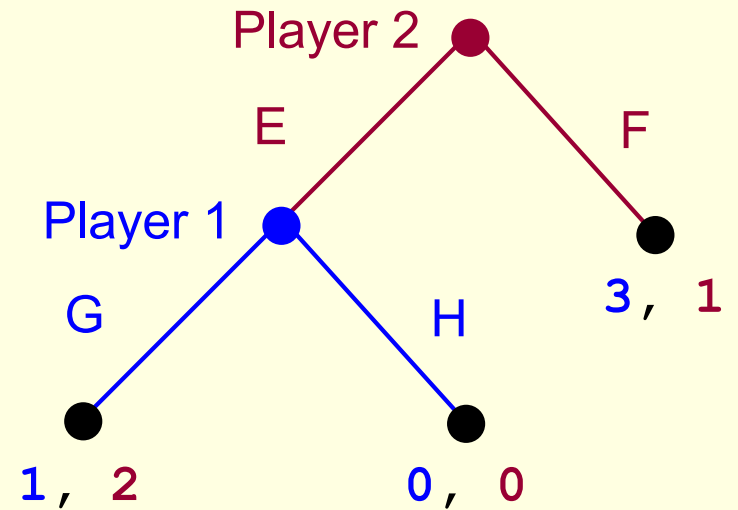
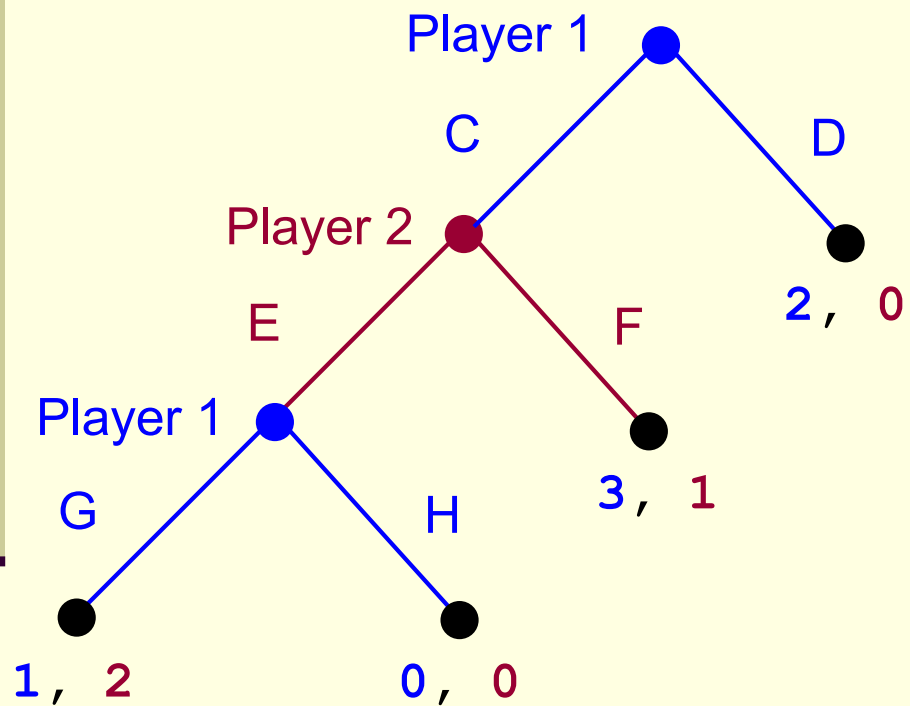
- 子博弈完美纳什均衡（**Subgame perfect Nash equilibrium**）是纳什均衡的一个精炼（**refinement**）。
- 它要求博弈的参与人必须是序贯理性的，即该战略不仅是事前最优的也是事后最优的，满足动态一致性的要求，因此可以排除不可置信的威胁。
- 如何在所有的纳什均衡中找出子博弈完美纳什均衡？
- 我们首先需要定义子博弈（**subgame**）。

Subgame

- 博弈树的一个子博弈开始于一个非终点节，包含这个非终点节之后所有的节点和边缘
- 一个子博弈开始于一个非终点节 x ，
 - 排除连接 x 和它前续节的边缘
 - 包含 x 的连接部分就是这个子博弈



Subgame: example



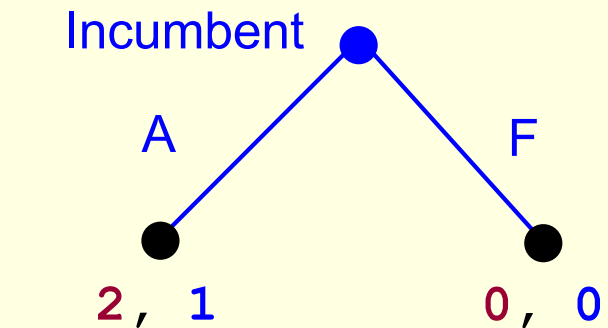
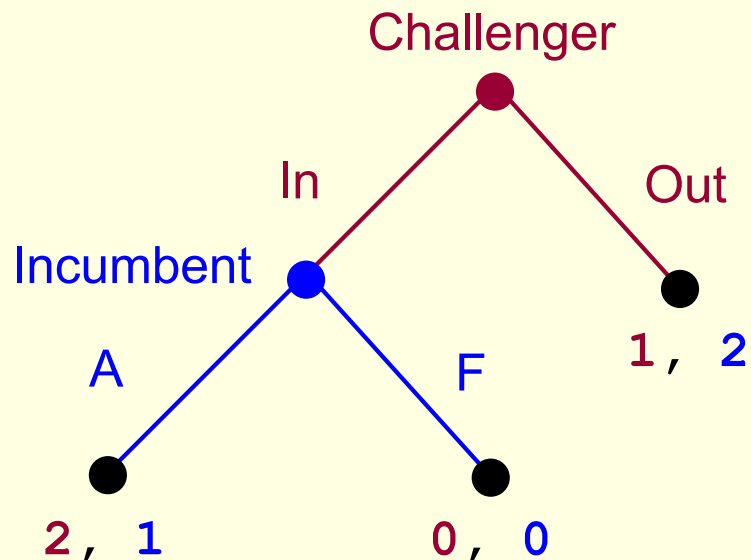
Subgame-perfect Nash equilibrium

- 子博弈是指原博弈中由某一个决策时点开始之后的部分所构成的博弈，它本身可以视作一个独立的博弈，代表的是参与人在博弈过程中某一个决策时点所面临的决策情形。
- 原博弈可以看成是一个从根节点开始的子博弈。
- 在动态博弈中，如果一个纳什均衡的策略在每一个子博弈中都构成了纳什均衡，那么动态博弈的这个纳什均衡是子博弈完美的。
- 子博弈完美纳什均衡是一个纳什均衡。

Entry game

■ 两个纳什均衡

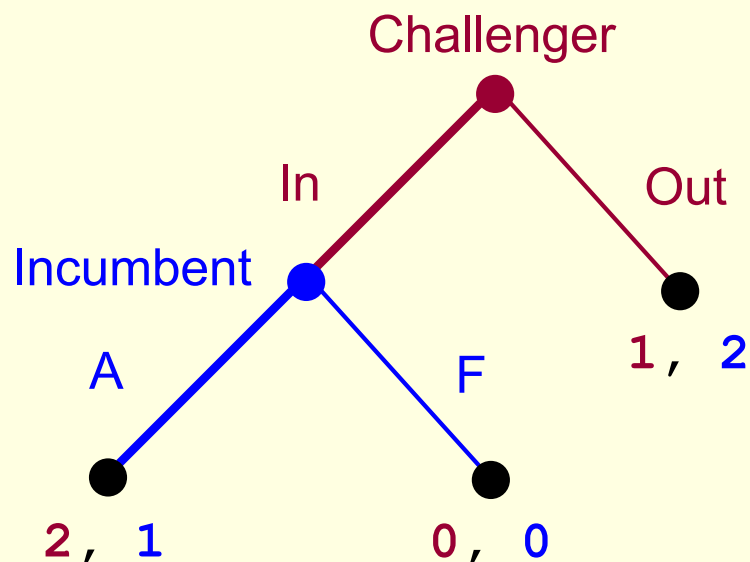
- (**In**, **Accommodate**) 是子博弈完美的.
- (**Out**, **Fight**) 不是子博弈完美的, 原因是在开始于Incumbent的子博弈中它没有导出纳什均衡.



Accommodate is the Nash equilibrium in this subgame.

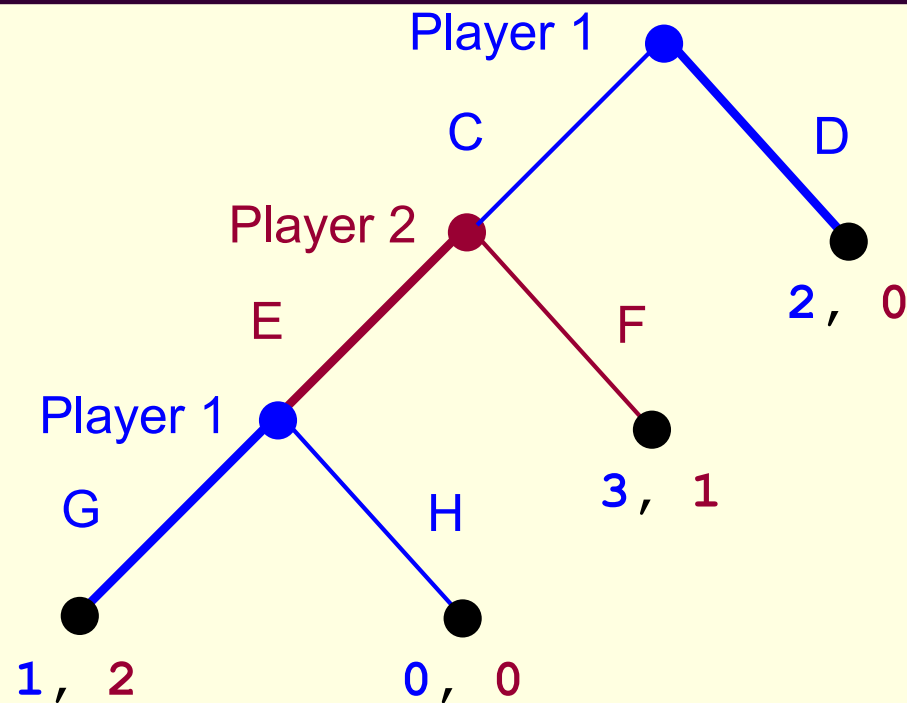
Find subgame perfect Nash equilibria: backward induction

- 开始于那些最小的子博弈
- 然后反向移动直到到达根



第一个数字是challenger的收益. 第二个数字是incumbent的收益.

Find subgame perfect Nash equilibria: backward induction



- 子博弈完美纳什均衡 (DG, E)
 - Player 1 选D, 且如果player 2 选E, 则她选G
 - 如果player 1选C, 则 Player 2选E

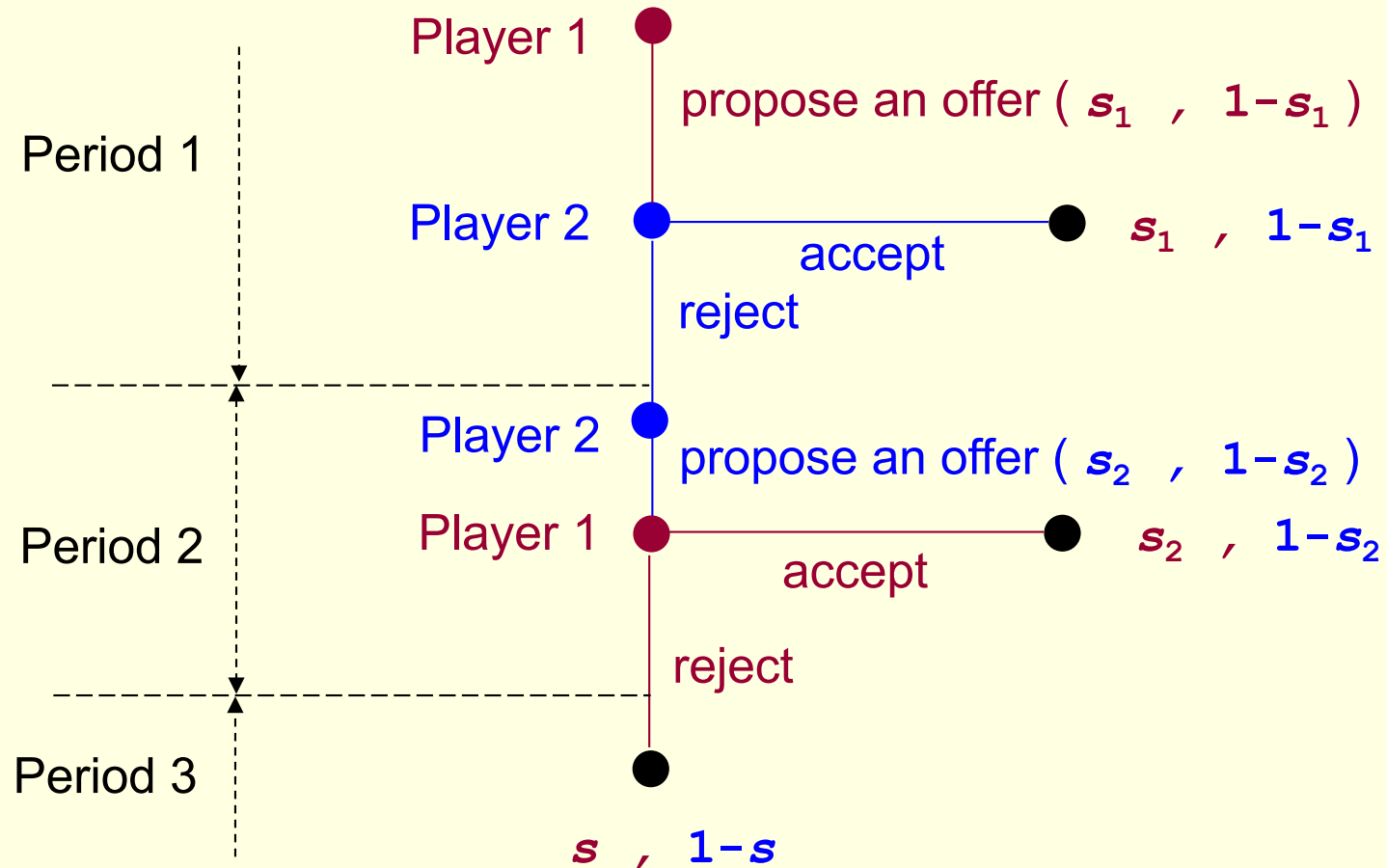
Existence of subgame-perfect Nash equilibrium

- 任何有限的完全且完美信息动态博弈都有一个子博弈完美纳什均衡，它可以通过逆向归纳法得到。
- 逆向归纳法的合理性在于我们假定参与人具有理性共识：参与人1具有理性，参与人2具有理性，参与人1知道参与人2具有理性，参与人2知道参与人1具有理性，参与人1知道参与人2知道参与人1具有理性，参与人2知道参与人1知道参与人2具有理性。。。

Sequential bargaining (2.1.D of Gibbons)

- 参与人1和2就一美元的分配进行谈判. 时序如下:
- 在第一阶段开始时, player 1建议她分走1美元的 s_1 , 留给player 2的份额为 $1-s_1$.
- Player 2或者接受这一条件, 或者拒绝这一条件 (这种情况下, 博弈将继续进行, 进入第二阶段)
- 在第二阶段的开始, player 2提议 player 1分得1美元的 s_2 , 留给player 2的份额为 $1-s_2$.
- Player 1或者接受这一条件, 或者拒绝这一条件 (这种情况下, 博弈继续进行, 进入第三阶段)
- 在第三阶段的开始, player 1得到1美元的 s , player 2得到 $1-s$, 这里 $0 < s < 1$.
- 参与人都是缺乏耐心的. 他们用一个因子 δ 来对他们的收益进行贴现, 这里 $0 < \delta < 1$

Sequential bargaining (2.1.D of Gibbons)

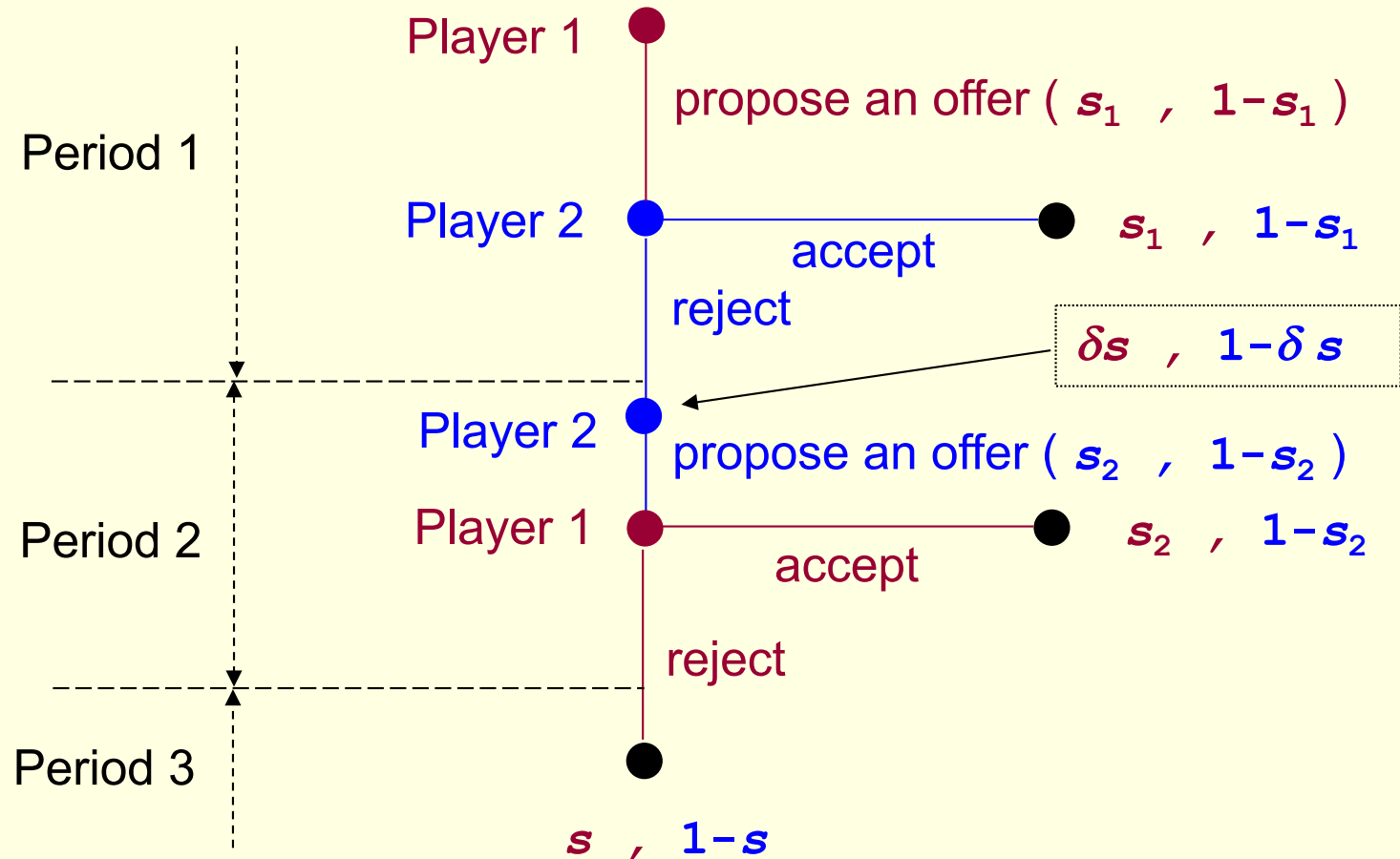


Solve sequential bargaining by backward induction

■ 阶段2:

- 当且仅当 $s_2 \geq \delta s$ 时, Player 1 接受 s_2 . (我们假定当接受和拒绝无差异时, 参与人总是选择接受条件)
- Player 2 面临以下两个选择:
 - (1) 向 player 1 提出 $s_2 = \delta s$, 在这个阶段留给她自己 $1-s_2 = 1-\delta s$, 或者
 - (2) 向 player 1 提出 $s_2 < \delta s$ (player 1 将会拒绝它), 下阶段接受 $1-s$. 它的贴现值是 $\delta(1-s)$
- 由于 $\delta(1-s) < 1-\delta s$, player 2 应该提出条件 $(s_2^*, 1-s_2^*)$, 其中 $s_2^* = \delta s$. Player 1 将接受它.

Sequential bargaining (2.1.D of Gibbons)

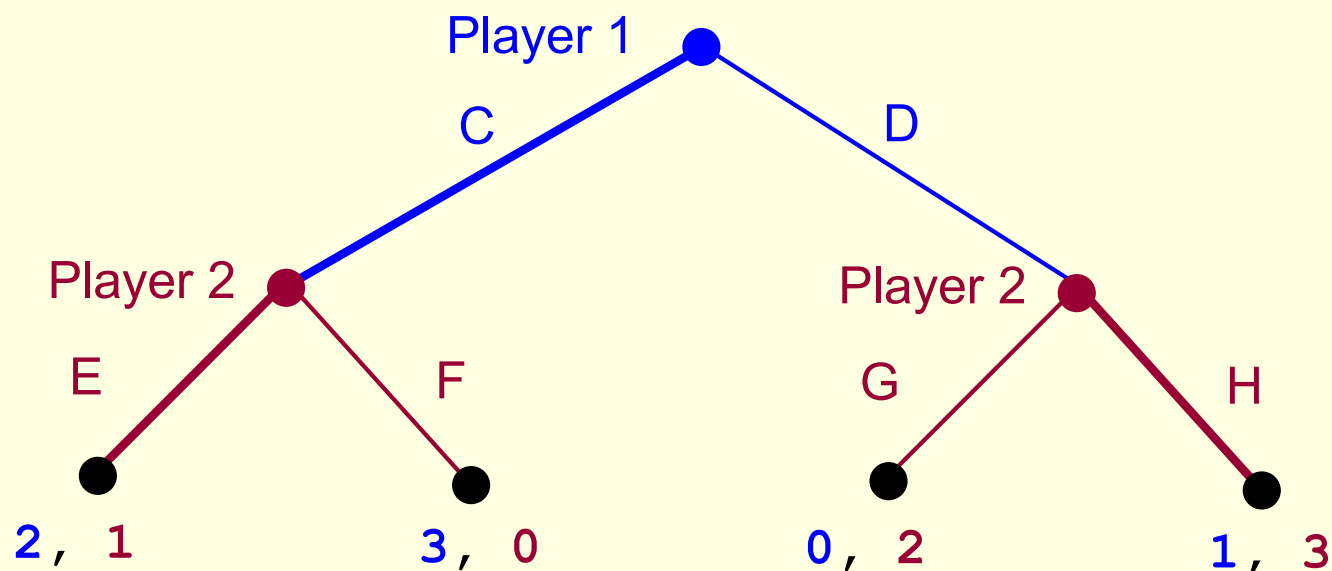


Solve sequential bargaining by backward induction

■ 阶段1:

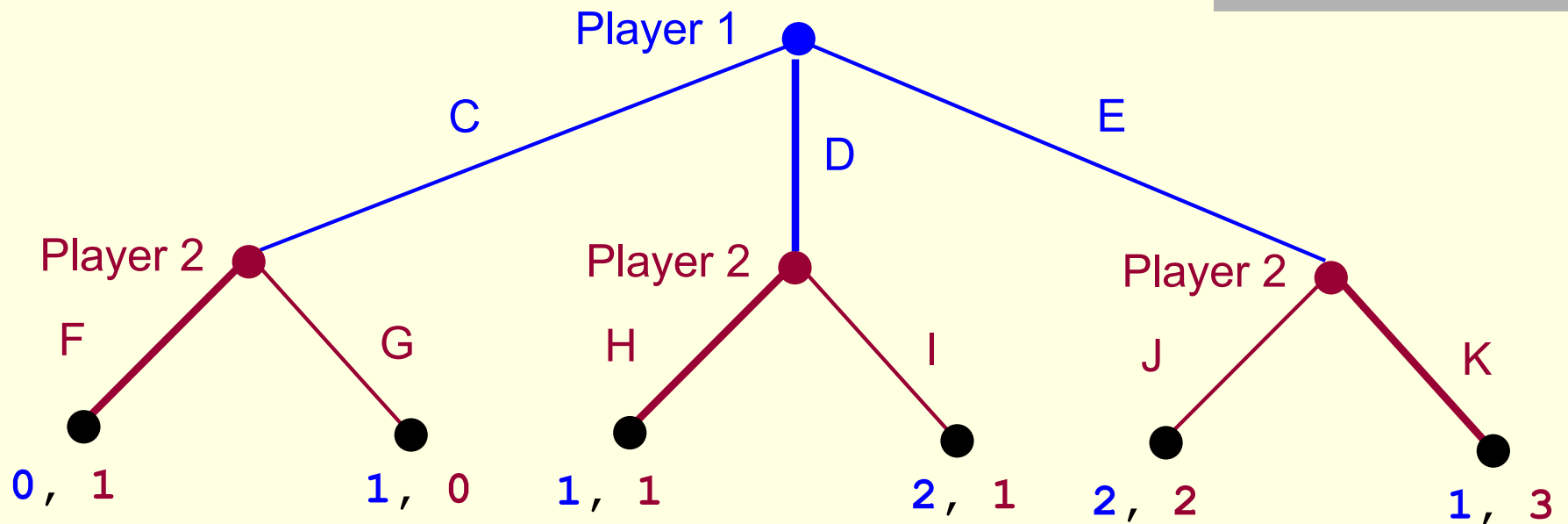
- 当且仅当 $1-s_1 \geq \delta(1-s_2^*) = \delta(1-\delta s)$ 或 $s_1 \leq 1-\delta(1-s_2^*)$ 时, Player 2接受 $1-s_1$, 其中 $s_2^* = \delta s$.
- Player 1面临以下两个选择:
 - (1) 向player 2提出 $1-s_1 = \delta(1-s_2^*) = \delta(1-\delta s)$, 在这个阶段留给她自己 $s_1 = 1-\delta(1-s_2^*) = 1-\delta+\delta\delta s$, 或者
 - (2) 向player 2提出 $1-s_1 < \delta(1-s_2^*)$ (player 2将会拒绝它), 下阶段接受 $s_2^* = \delta s$. 它的贴现值是 $\delta\delta s$
- 由于 $\delta\delta s < 1-\delta+\delta\delta s$, player 1应该提出条件 $(s_1^*, 1-s_1^*)$, 其中 $s_1^* = 1-\delta+\delta\delta s$

Backward induction: illustration



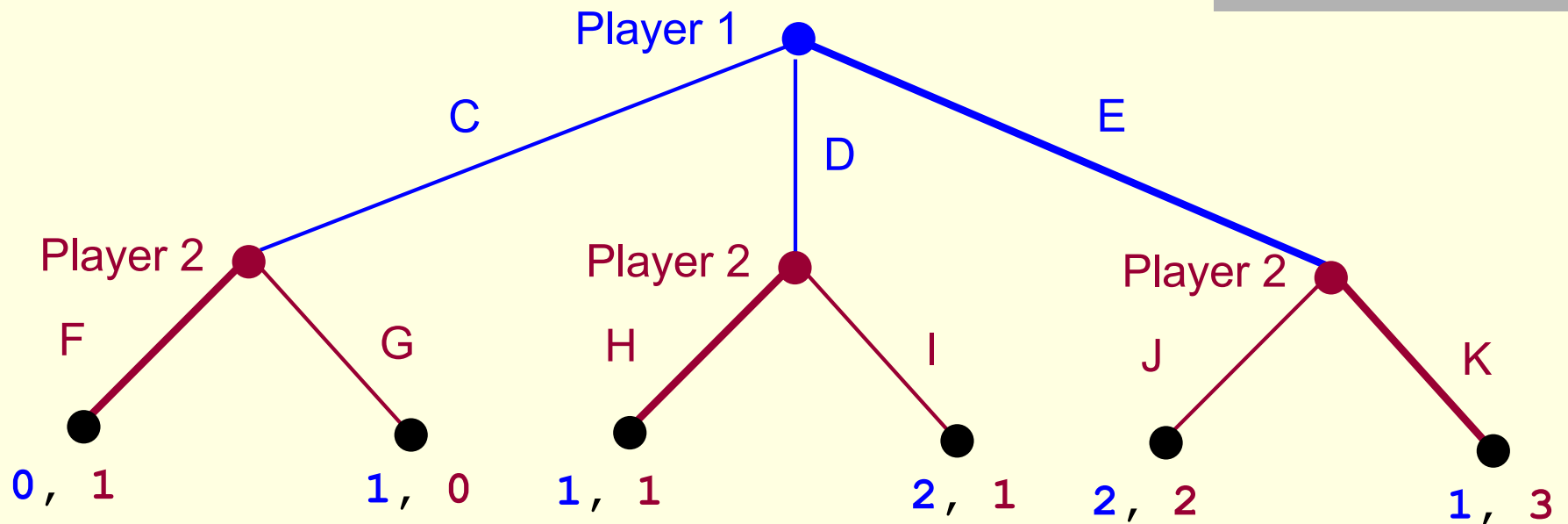
- 子博弈完美纳什均衡 (C, EH).
 - player 1选C;
 - 如果player 1选 C, player 2选 E, 如果player 1 选D, player 2选 H.

Multiple subgame-perfect Nash equilibria: illustration



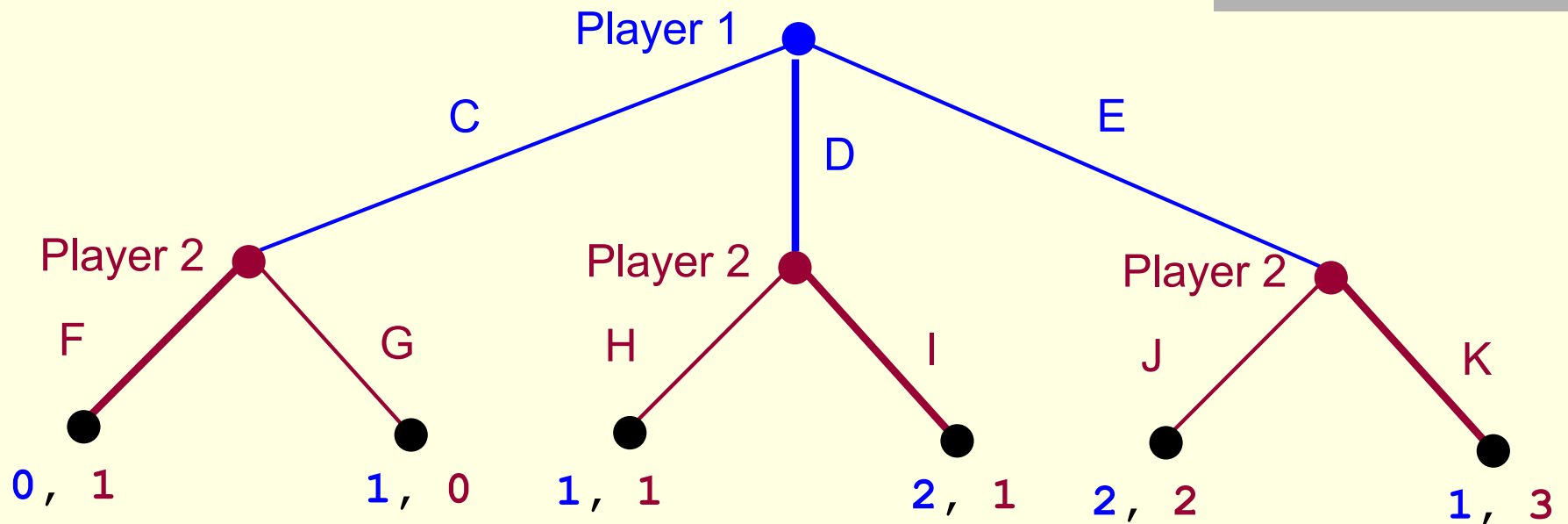
- 子博弈完美纳什均衡(D, FHK).
 - player 1选 D
 - 如果player 1选C， player 2选 F,如果player 1选D， player 2选 H,如果player 1选E， player 2选 K.

Multiple subgame-perfect Nash equilibria



- 子博弈完美纳什均衡(E, FHK).
 - player 1选 E;
 - 如果player 1选C, player 2选 F,如果player 1选D, player 2选 H,如果player 1选E, player 2选 K.

Multiple subgame-perfect Nash equilibria



- 子博弈完美纳什均衡(D, FIK).
 - player 1 plays D;
 - 如果player 1选C， player 2选 F,如果player 1选D， player 2选 I,如果player 1选E， player 2选 K.

Stackelberg model of duopoly

- 仅有firm 1 和firm 2两家企业生产同质的产品. 产量分别用 q_1 和 q_2 表示.
- 博弈时间顺序如下:
 - Firm 1选择产量 $q_1 \geq 0$.
 - Firm 2观察到 q_1 , 然后选择产量 $q_2 \geq 0$.
- 市场价格是 $P(Q)=a -Q$, 这里 a 是常数, 且 $Q=q_1+q_2$.
- firm i 生产 q_i 的成本是 $C_i(q_i)=cq_i$.
- 收益函数:

$$u_1(q_1, q_2)=q_1(a-(q_1+q_2)-c)$$

$$u_2(q_1, q_2)=q_2(a-(q_1+q_2)-c)$$

Stackelberg model of duopoly

- 用逆向归纳法找到子博弈完美纳什均衡
 - 我们首先解决**firm 2**面对任意 $q_1 \geq 0$ 的问题, 得到**firm 2**针对 q_1 的最优反应. 也就是说, 我们首先解出开始于**firm 2**的所有子博弈.
 - 然后我们解决**firm 1**的问题. 也就是说, 解出开始于**firm 1**的子博弈

Stackelberg model of duopoly

- 解决firm 2面对任意 $q_1 \geq 0$ 的问题，得到firm 2针对 q_1 的最优反应.

- $\text{Max } u_2(q_1, q_2) = q_2(a - (q_1 + q_2) - c)$
subject to $0 \leq q_2 \leq +\infty$

$$\text{FOC: } a - 2q_2 - q_1 - c = 0$$

- Firm 2的最优反应,
- $R_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2$ if $q_1 \leq a - c$
 $= 0$ if $q_1 > a - c$

Stackelberg model of duopoly

- 解决firm 1的问题. 注意到firm 1也能够解 firm 2的问题. 即, firm 1知道 firm 2对任意 q_1 的最优反应. 所以, firm 1的问题是

- $$\text{Max } u_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1(a - (q_1 + R_2(q_1)) - c)$$
$$\text{subject to } 0 \leq q_1 \leq +\infty$$

即,

$$\text{Max } u_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1(a - q_1 - c)/2$$
$$\text{subject to } 0 \leq q_1 \leq +\infty$$

$$\text{FOC: } (a - 2q_1 - c)/2 = 0$$
$$q_1 = (a - c)/2$$

Stackelberg model of duopoly

■ 子博弈完美纳什均衡

➤ $((a - c)/2, R_2(q_1))$, where

$$R_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2 \text{ if } q_1 \leq a - c \\ = 0 \text{ if } q_1 > a - c$$

➤ 即, firm 1 选择产量 $(a - c)/2$, firm 1 选择产量 q_1 时 firm 2 选择产量 $R_2(q_1)$.

➤ 逆向归纳解是 $((a - c)/2, (a - c)/4)$.

➤ Firm 1 选择产量 $(a - c)/2$, firm 2 选择产量 $(a - c)/4$.

Stackelberg model of duopoly

- Firm 1生产

$$q_1 = (a - c)/2 \quad \text{它的利润是}$$
$$q_1(a - (q_1 + q_2) - c) = (a - c)^2/8$$

- Firm 2生产

$$q_2 = (a - c)/4 \quad \text{它的利润是}$$
$$q_2(a - (q_1 + q_2) - c) = (a - c)^2/16$$

- 总产量是 $3(a - c)/4$.

Cournot model of duopoly

- Firm 1 生产

$$q_1 = (a - c)/3 \quad \text{它的利润是}$$
$$q_1(a - (q_1 + q_2) - c) = (a - c)^2/9$$

- Firm 2 生产

$$q_2 = (a - c)/3 \quad \text{它的利润是}$$
$$q_2(a - (q_1 + q_2) - c) = (a - c)^2/9$$

- 总产量是 $2(a - c)/3$.

Monopoly

- 假设只有一家企业,即垄断者,生产产品.垄断者解以下问题来决定它的产量 q_m .

- $$\text{Max } q_m (a - q_m - c)$$
$$\text{subject to } 0 \leq q_m \leq +\infty$$

$$\text{FOC: } a - 2q_m - c = 0$$

$$q_m = (a - c)/2$$

- 垄断者的产量
 $q_m = (a - c)/2$ 它的利润
 $q_m(a - q_m - c) = (a - c)^2/4$

Sequential-move Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 两家企业: firm 1和firm 2.
- 每家企业选择它的产品的价格时不知道其他企业的选择. 价格分别用 p_1 和 p_2 表示.
- 博弈的时间顺序如下.
 - Firm 1选择价格 $p_1 \geq 0$.
 - Firm 2观察到 p_1 然后选择价格 $p_2 \geq 0$.
- 消费者对firm 1 产品的需求量: $q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$.
- 消费者对firm 2 产品的需求量: $q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$.
- firm i 生产数量为 q_i 的成本是 $C_i(q_i)=cq_i$.

Sequential-move Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 对任何 $p_1 \geq 0$ 解 firm 2 的问题，得到 firm 2 对 p_1 的最优反应。

- $$\text{Max } u_2(p_1, p_2) = (a - p_2 + bp_1)(p_2 - c)$$

subject to $0 \leq p_2 \leq +\infty$

$$\text{FOC: } a + c - 2p_2 + bp_1 = 0$$

$$p_2 = (a + c + bp_1)/2$$

- Firm 2 的最优反应，
- $R_2(p_1) = (a + c + bp_1)/2$

Sequential-move Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 解firm 1的问题. 注意到firm 1也能够解 firm 2的问题. Firm 1知道 firm 2对 p_1 的最优反应. 所以, firm 1的问题是

- $$\text{Max } u_1(p_1, R_2(p_1)) = (a - p_1 + b \times R_2(p_1))(p_1 - c)$$

subject to $0 \leq p_1 \leq +\infty$

即,

$$\text{Max } u_1(p_1, R_2(p_1)) = (a - p_1 + b \times (a + c + bp_1)/2)(p_1 - c)$$

subject to $0 \leq p_1 \leq +\infty$

- FOC: $a - p_1 + b \times (a + c + bp_1)/2 + (-1 + b^2/2)(p_1 - c) = 0$
$$p_1 = (a + c + (ab + bc - b^2c)/2) / (2 - b^2)$$

Sequential-move Bertrand model of duopoly (differentiated products)

■ 子博弈完美纳什均衡

➤ $((a+c+(ab+bc-b^2c)/2)/(2-b^2), R_2(p_1))$,
其中 $R_2(p_1) = (a + c + bp_1)/2$

➤ Firm 1 选择价格
 $(a+c+(ab+bc-b^2c)/2)/(2-b^2)$,
firm 1 选择价格 p_1 时 firm 2 选择价格 $R_2(p_1)$.

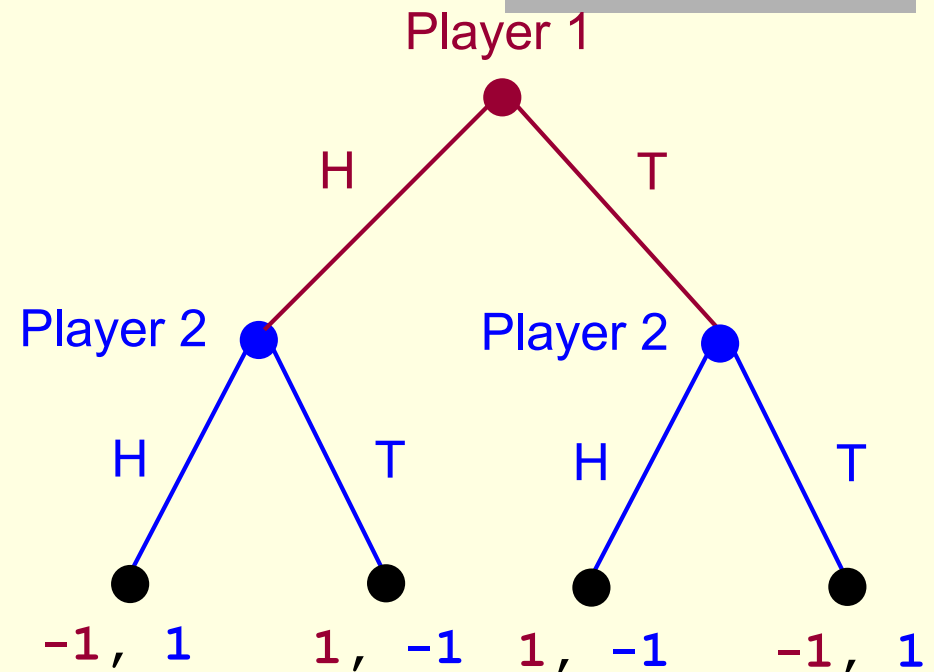
Dynamic games of complete and perfect information

■ 完美信息

- 在选择下一次行动前可以观察到所有以前的行动.
- 参与者做出决策前知道**谁**行动了，干了**什么**

Perfect information: illustration (sequential matching pennies)

- 两个参与人各有一枚硬币.
- Player 1先选择是显示 Head 还是 Tail.
- 在观察player 1的选择之后, player 2选择显示Head或 Tail
- 两个参与人都知道以下规则:
 - 如果两枚硬币一致 (都是heads 或都是 tails) 那么player 2 赢得 player 1的硬币.
 - 否则, player 1赢得 player 2的硬币.



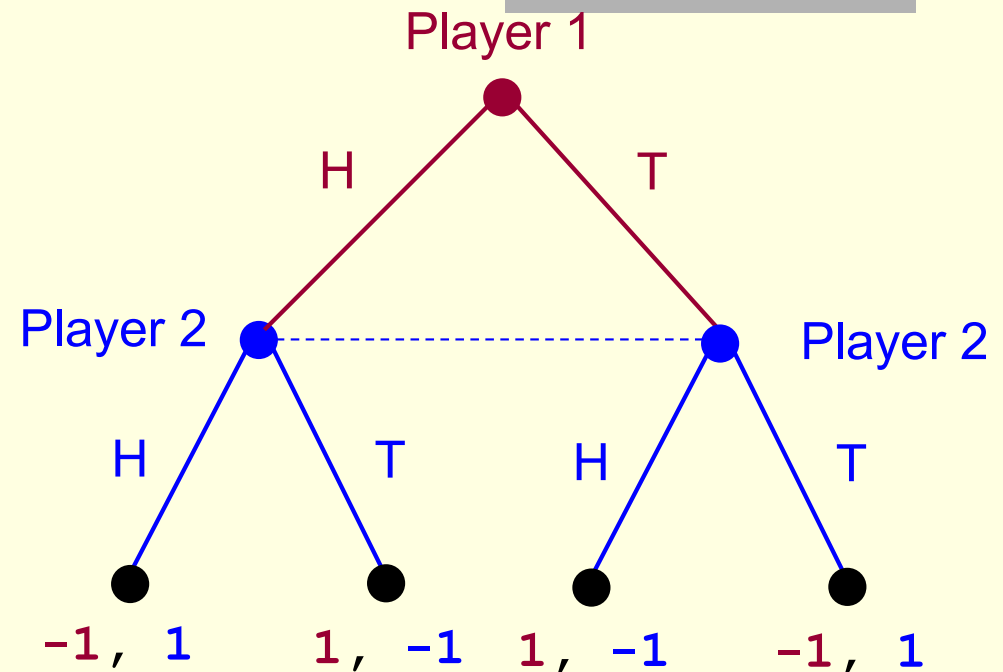
Dynamic games of complete and imperfect information

■ 不完美信息

- 参与者做出决策前可能并不能确切的知道**谁**做了**什么**选择.
- 例: 在**player 1**做出选择后 **player 2**进行她的选择. **Player 2**需要在不知道 **player 1**做出什么选择的情况下进行她的决策.

Imperfect information: illustration

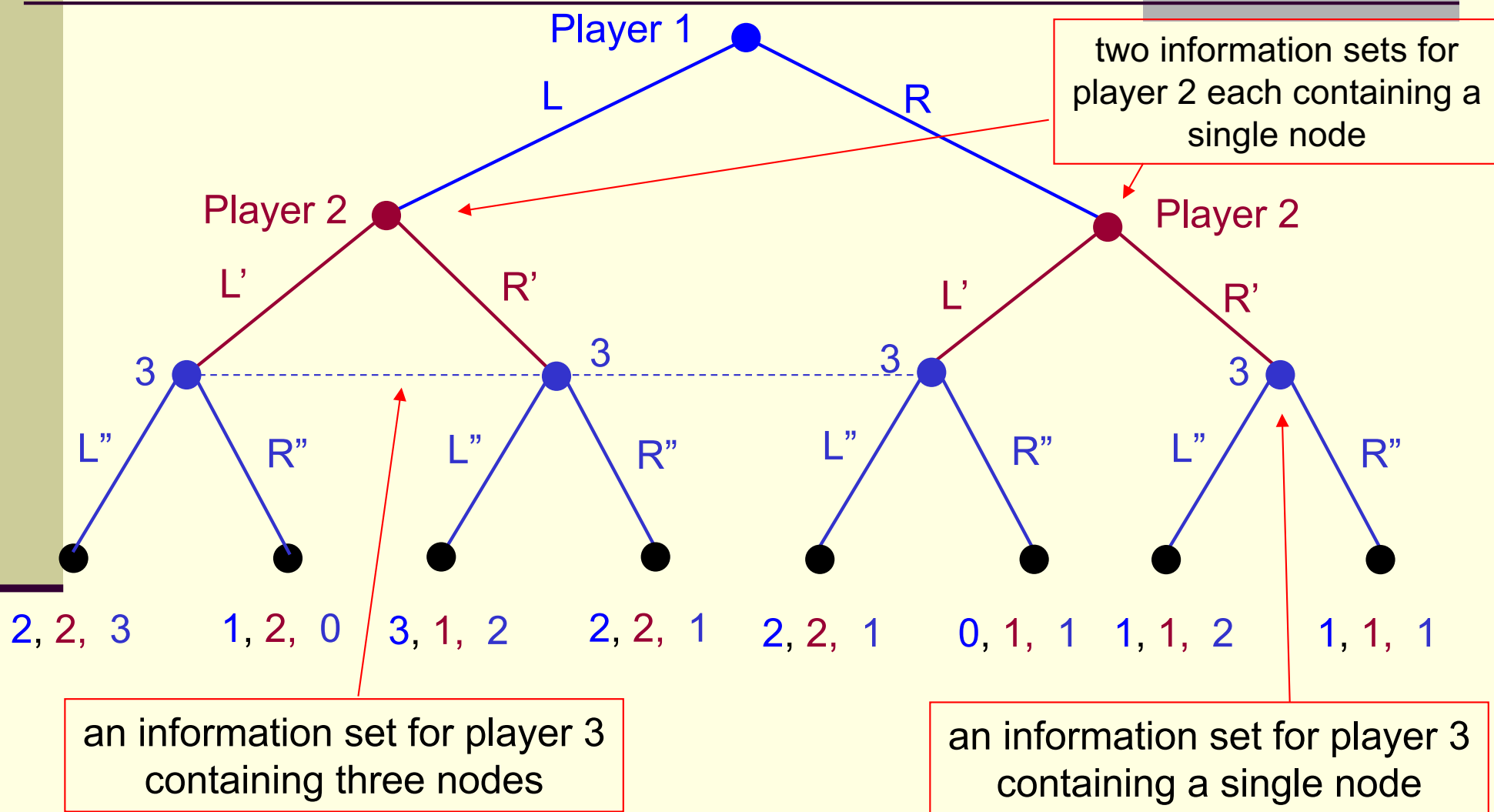
- 两个参与人各有一枚硬币.
- Player 1先选择是显示 Head 还是 Tail.
- 然后player 2在不知道 player 1选择的情况下选择是显示 Head还是 Tail,
- 两个参与人都知道以下规则:
 - 如果两枚硬币一致 (都是 heads 或都是 tails) 那么 player 2 赢得 player 1的 硬币.
 - 否则, player 1赢得 player 2的硬币.



Information set

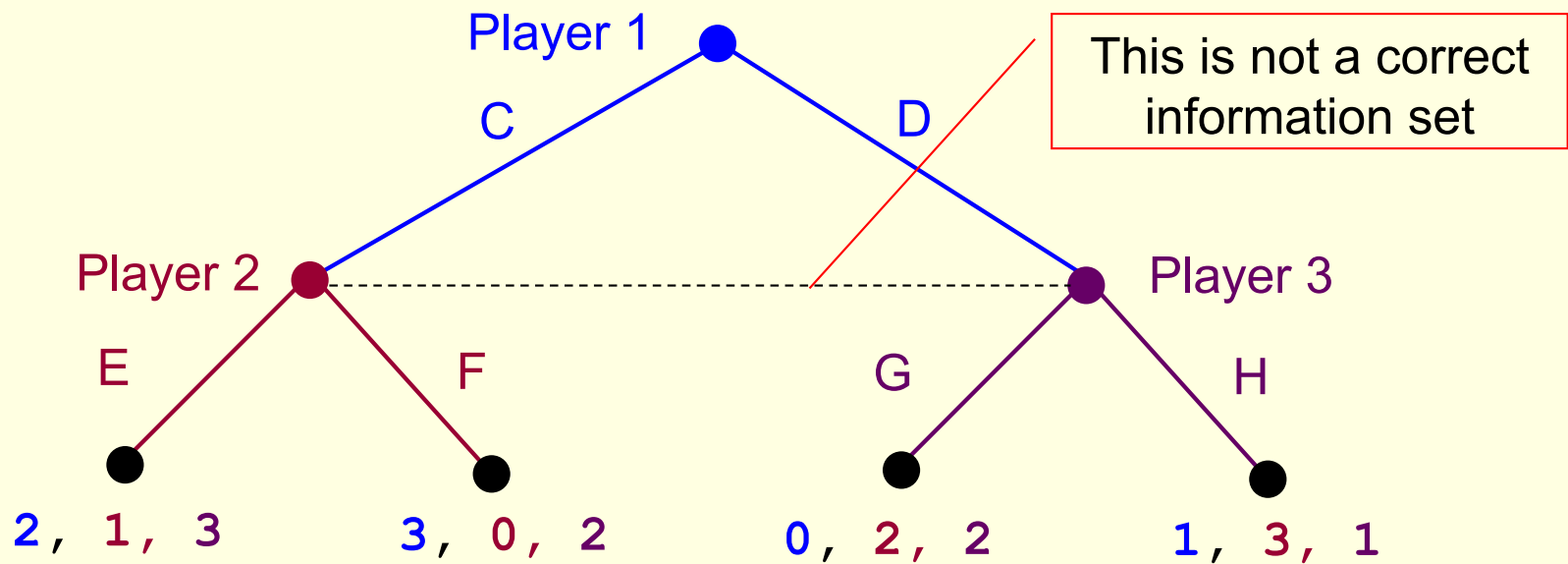
- **Gibbons**的定义: 参与人的一个信息集是指满足以下条件的决策节的集合:
 - 在此信息集中的每一个节都轮到该参与人行动, 且
 - 当博弈的进行达到信息集中的一个节, 应该行动的参与人并不知道达到了 (或没有达到) 信息集中的哪一个节.
- 一个信息集中所有的节点都属于同一个参与人
- 参与人在信息集中的每一个节点都必须有相同的可行行动集合.

Information set: illustration(pp.94-95)



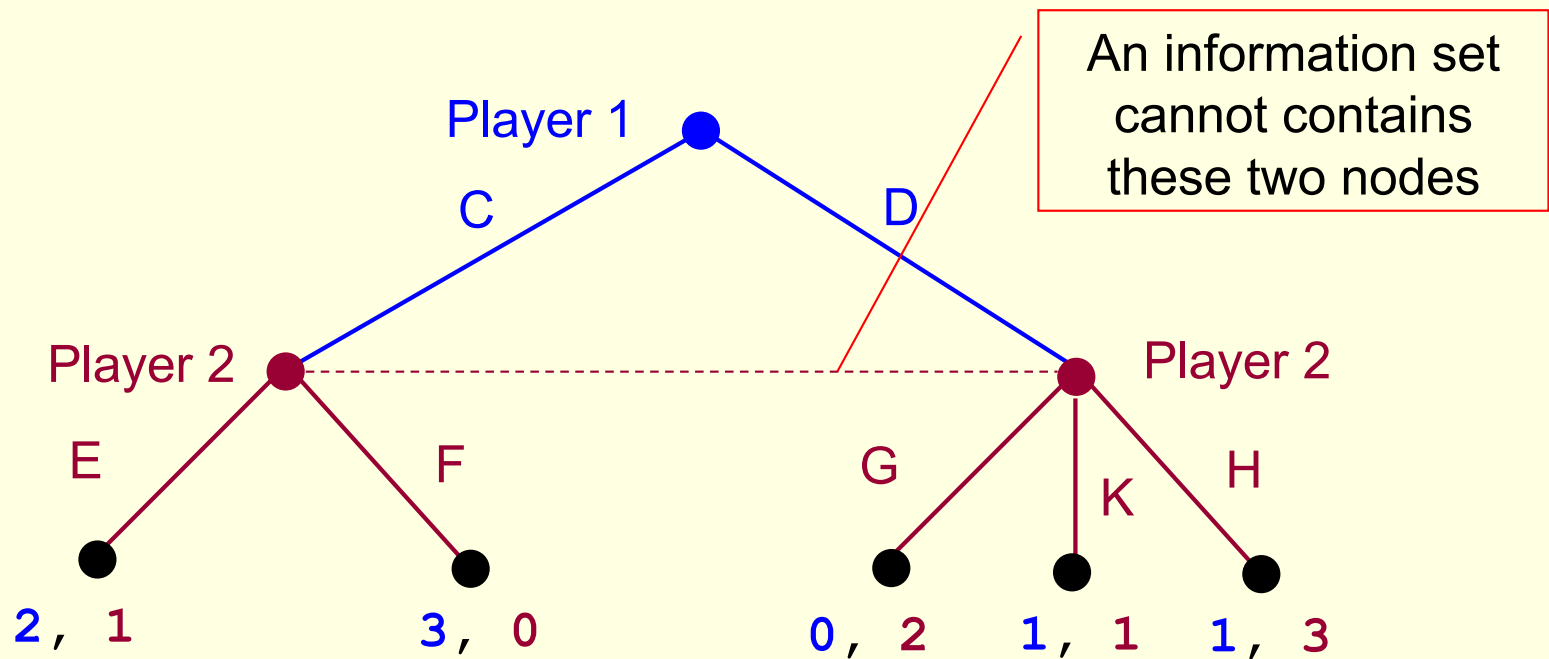
Information set: illustration

- 一个信息集中所有的节点都属于同一个参与人



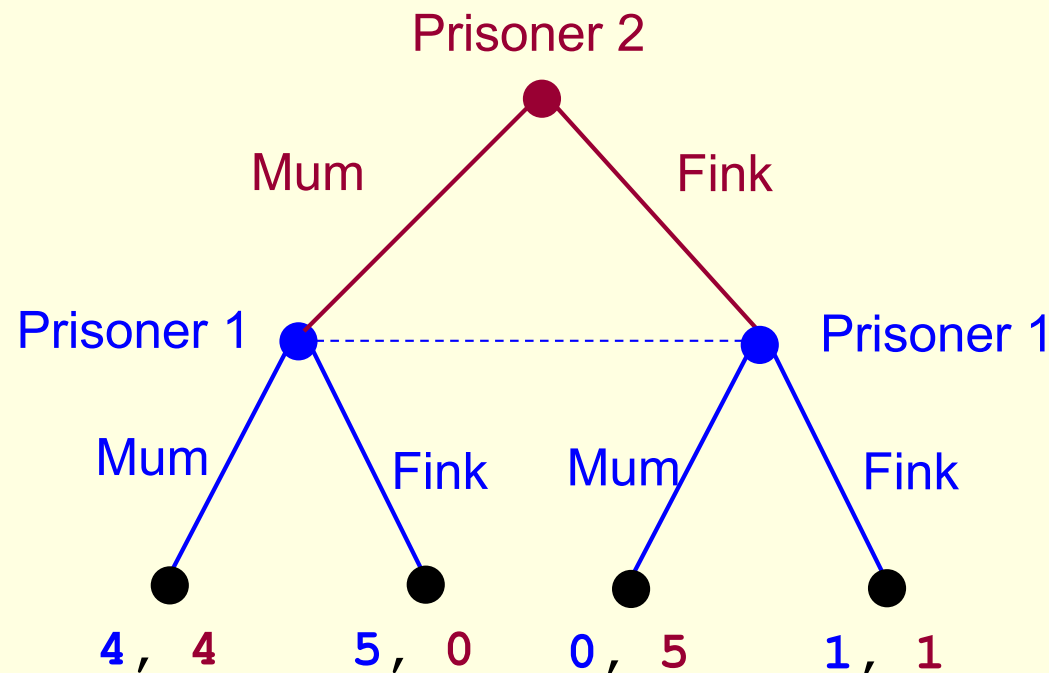
Information set: illustration

- 参与人在信息集中的每一个节点都必须有相同的可行行动集合。



Represent a static game as a game tree: illustration

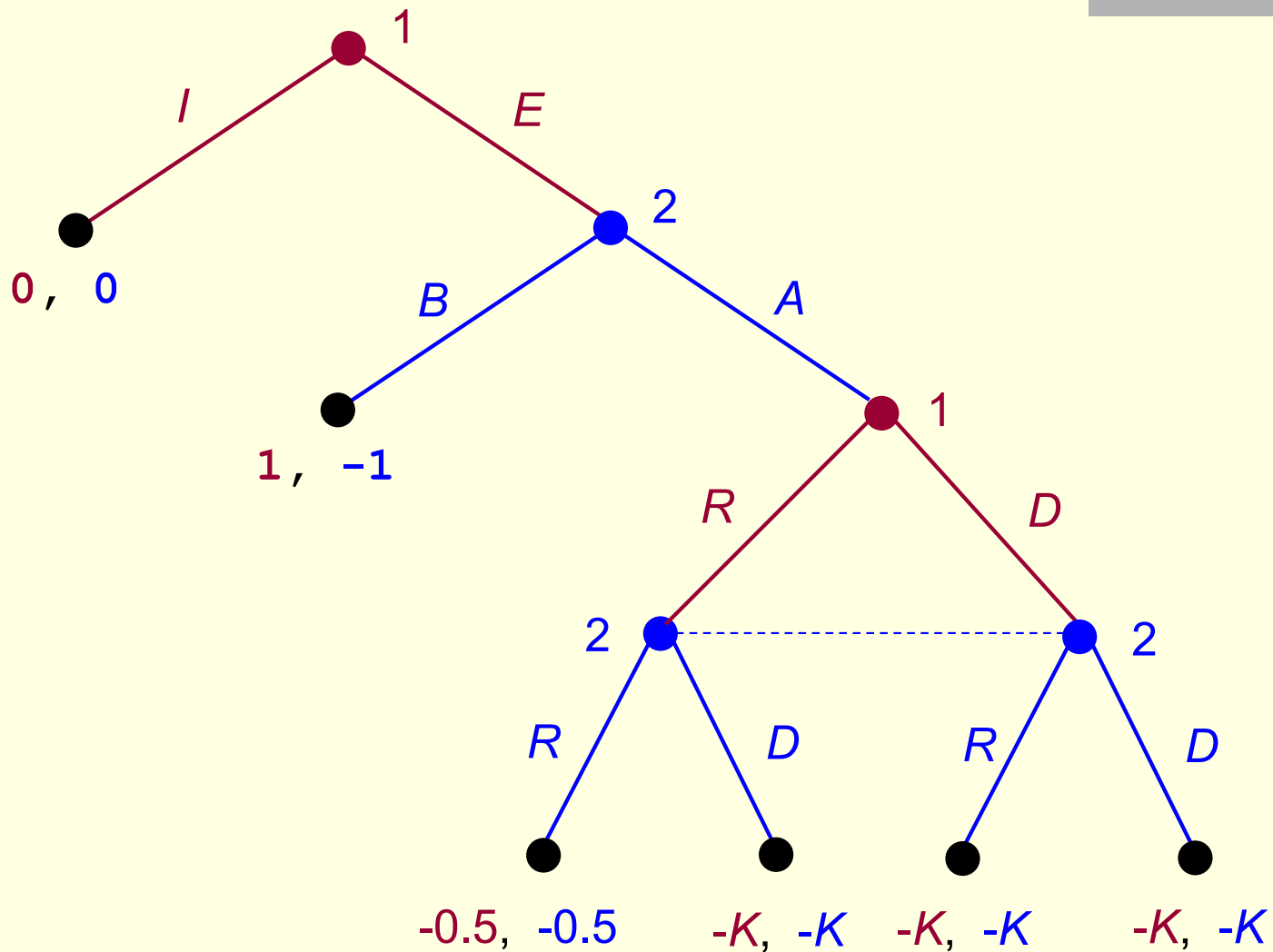
- **囚徒困境** (图2.4.3. 第一个数字是player 1 的收益, 第二个数字是player 2的收益)



Example: mutually assured destruction

- 两个超级大国, 1 和 2, 卷入了一起挑衅事件.
- 博弈开始于superpower 1的选择, 它或者忽视这个事件(ignore, I), 得到收益 $(0, 0)$, 或者使事态进一步升级(escalate, E).
- superpower 1 使事态升级后, superpower 2可以后退(back down, B), 这会使它丧失颜面, 获得收益 $(1, -1)$, 或者它可以选择进行核对抗(atomic confrontation, A). 这种情况下, 两个超级大国会同时行动, 进行以下博弈.
- 它们或者选择撤退(retreat, R), 或者选择末日(doomsday, D), 从而世界被毁灭. 如果两国都选择撤退, 那么它们会忍受一点小的损失, 收益为 $(-0.5, -0.5)$. 如果它们有一方选择末日, 那么世界将被毁灭, 收益为 $(-K, -K)$, 其中 K 是一个很大的数字.

Example: mutually assured destruction

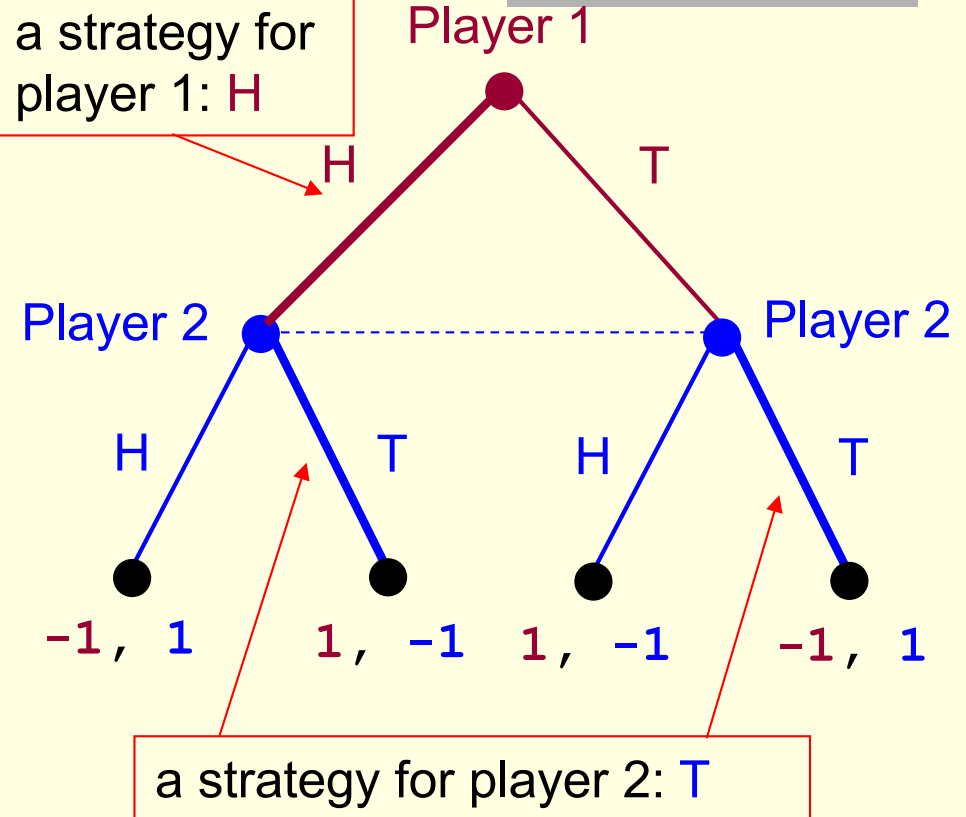


Perfect information and imperfect information

- 如果一个动态博弈中每一个信息集只包含一个节点，那么这个博弈被称为完美信息博弈.
- 如果一个动态博弈中有一些信息集包含的节点多于一个，那么这个博弈被称为不完美信息博弈.

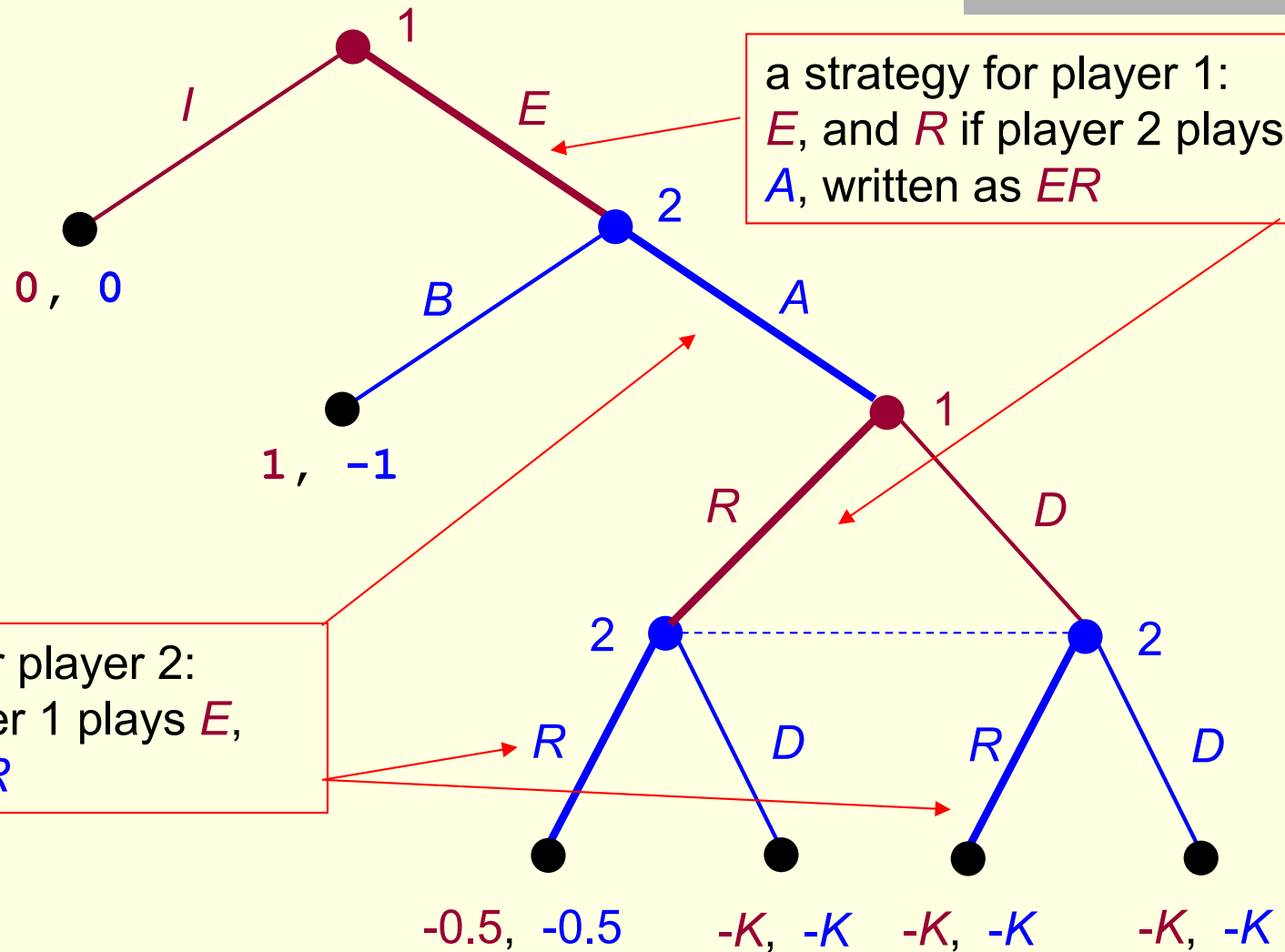
Strategy and payoff

- 参与人的一个策略是关于行动的一个完整计划.
- 它明确了在参与人可能会遇到的每一种情况下对可行行动的选择.
- 它明确了参与人在她的每个信息集选择什么行动



Player 1's payoff is 1 and player 2's payoff is -1 if player 1 plays H and player 2 plays T

Strategy and payoff: illustration



Nash equilibrium in a dynamic game

- 我们也可以使用标准式来表述动态博弈
- 完全信息动态博弈的纳什均衡集就是它的标准式的纳什均衡的集合
- 怎样在一个完全信息动态博弈中找到纳什均衡
 - 构建完全信息动态博弈的标准式
 - 在标准式中找到纳什均衡

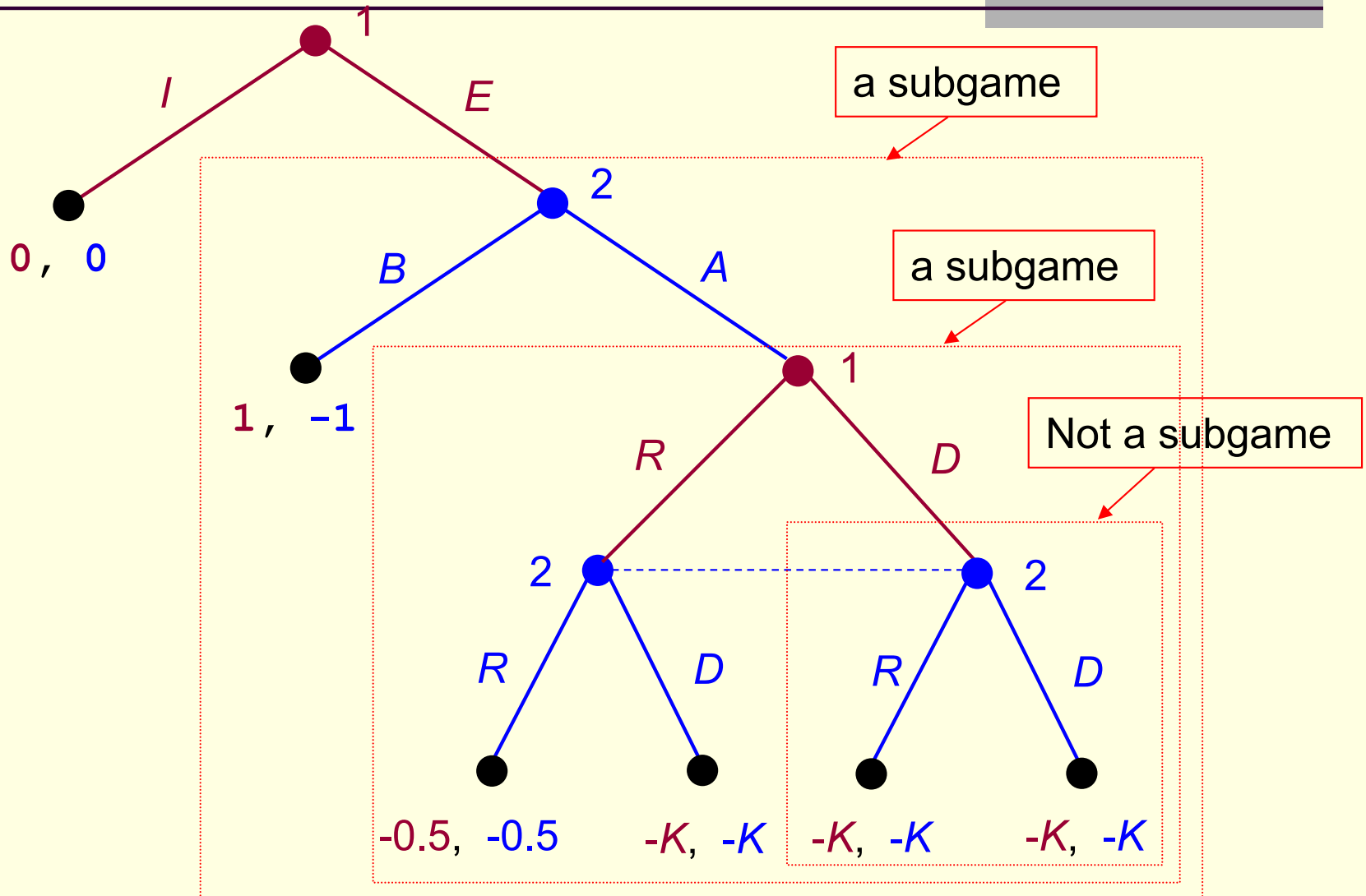
Remove nonreasonable Nash equilibrium

- 子博弈完美纳什均衡（**Subgame perfect Nash equilibrium**）是纳什均衡的一个精炼（**refinement**）
- 它可以排除不合理的纳什均衡或不可置信的威胁
- 我们首先需要定义子博弈（**subgame**）

Subgame

- 动态博弈树的一个子博弈
 - 始于一个单节信息集 (一个信息集只包含一个节点),
 - 包含这个单节信息集后的所有节点和边缘
 - 没有对任何信息集形成分割; 即如果信息集的一个节点属于这个子博弈, 那么这个信息集的所有节点也属于这个子博弈.

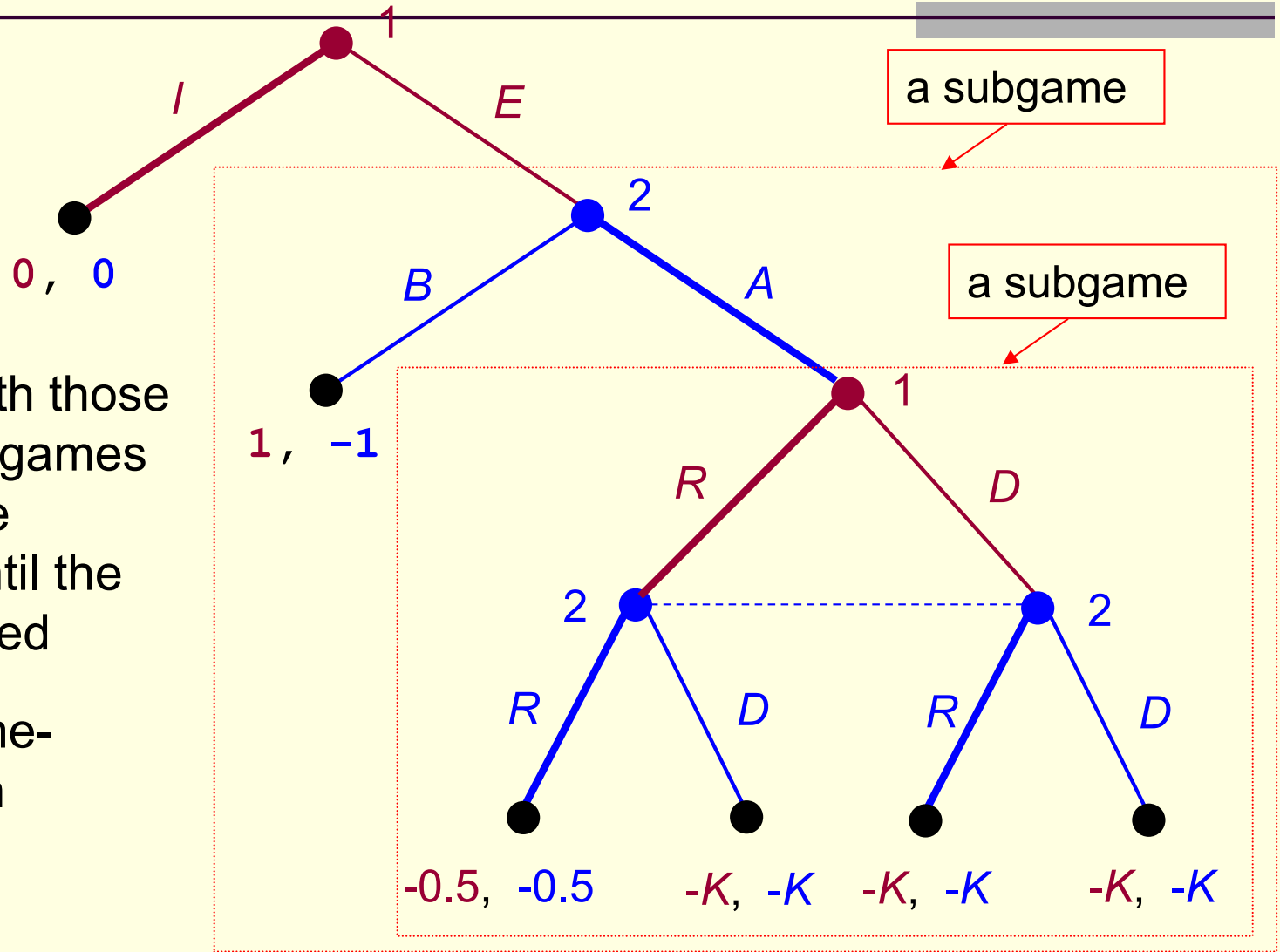
Subgame: illustration



Subgame-perfect Nash equilibrium

- 在动态博弈中，如果一个纳什均衡的策略在该博弈的每一个子博弈中都构成或推导出一个纳什均衡，那么这个纳什均衡是子博弈完美的。
- 子博弈完美纳什均衡是一个纳什均衡。

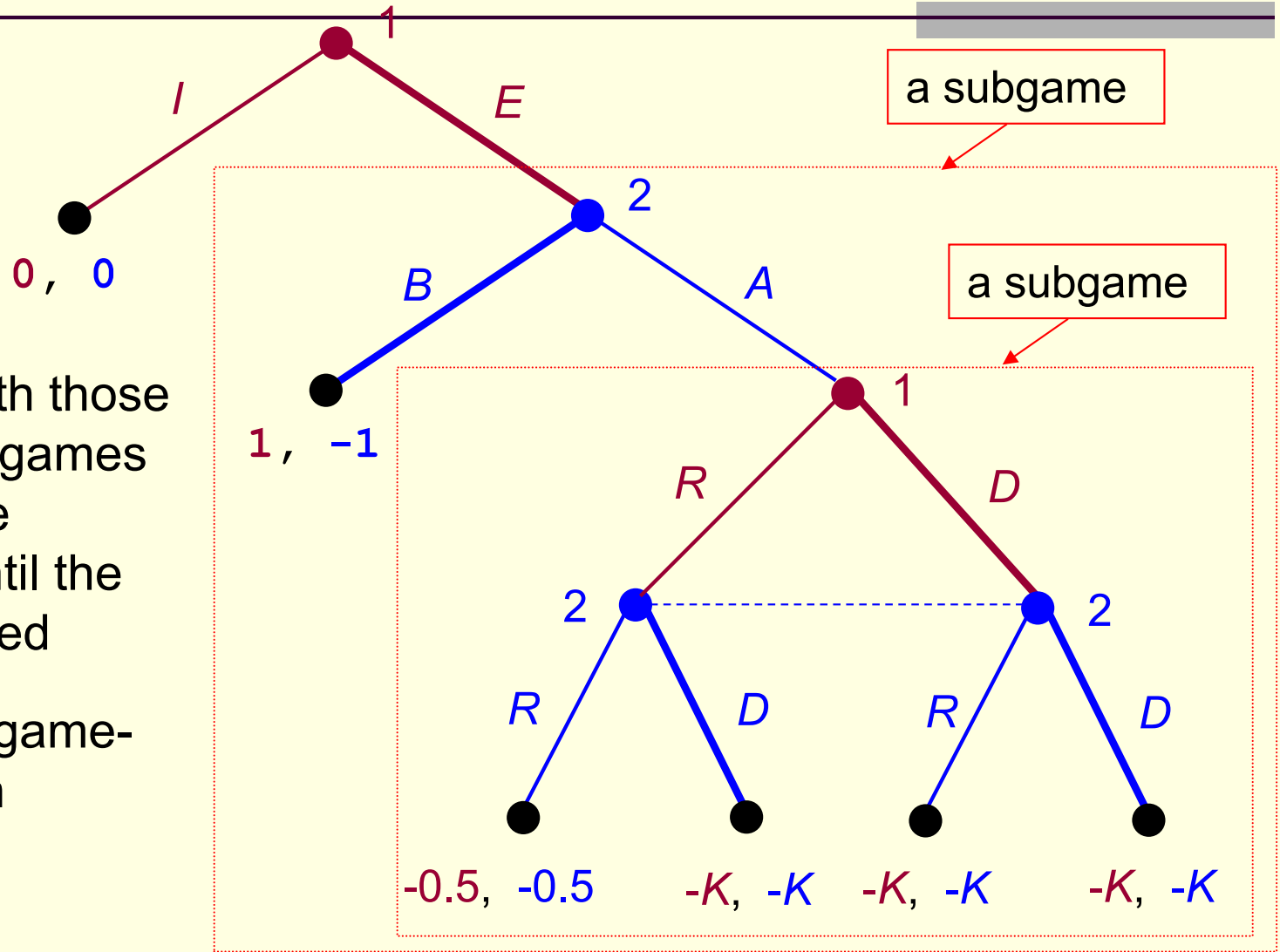
Find subgame perfect Nash equilibria: backward induction



- Starting with those smallest subgames
- Then move backward until the root is reached

One subgame-perfect Nash equilibrium
(*IR*, *AR*)

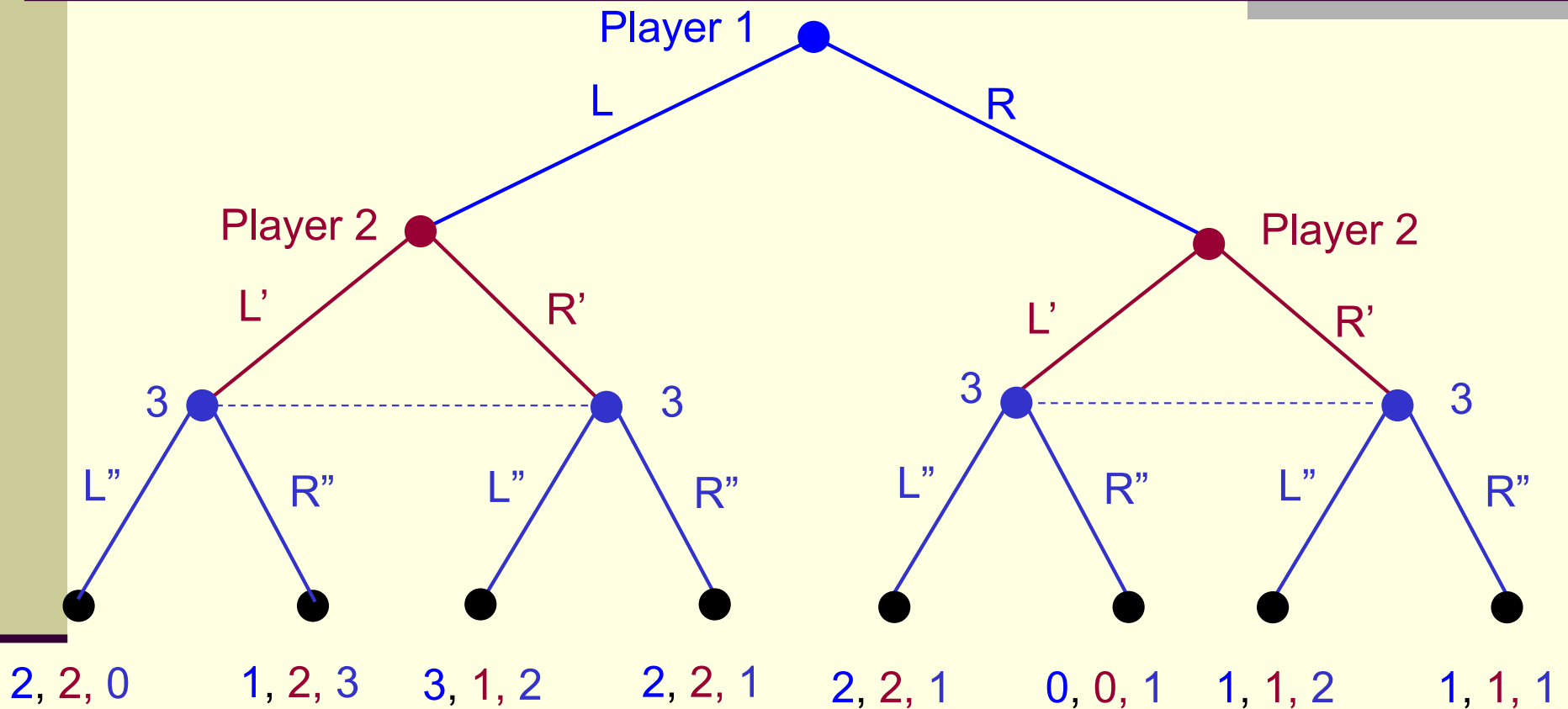
Find subgame perfect Nash equilibria: backward induction



- Starting with those smallest subgames
- Then move backward until the root is reached

Another subgame-perfect Nash equilibrium
(*ED*, *BD*)

Find subgame perfect Nash equilibria: backward induction



- 哪个是子博弈完美纳什均衡?(R,L'L',R''L'')
- 子博弈1的NE是 (L',R''), 子博弈2的NE是 (L',L'')

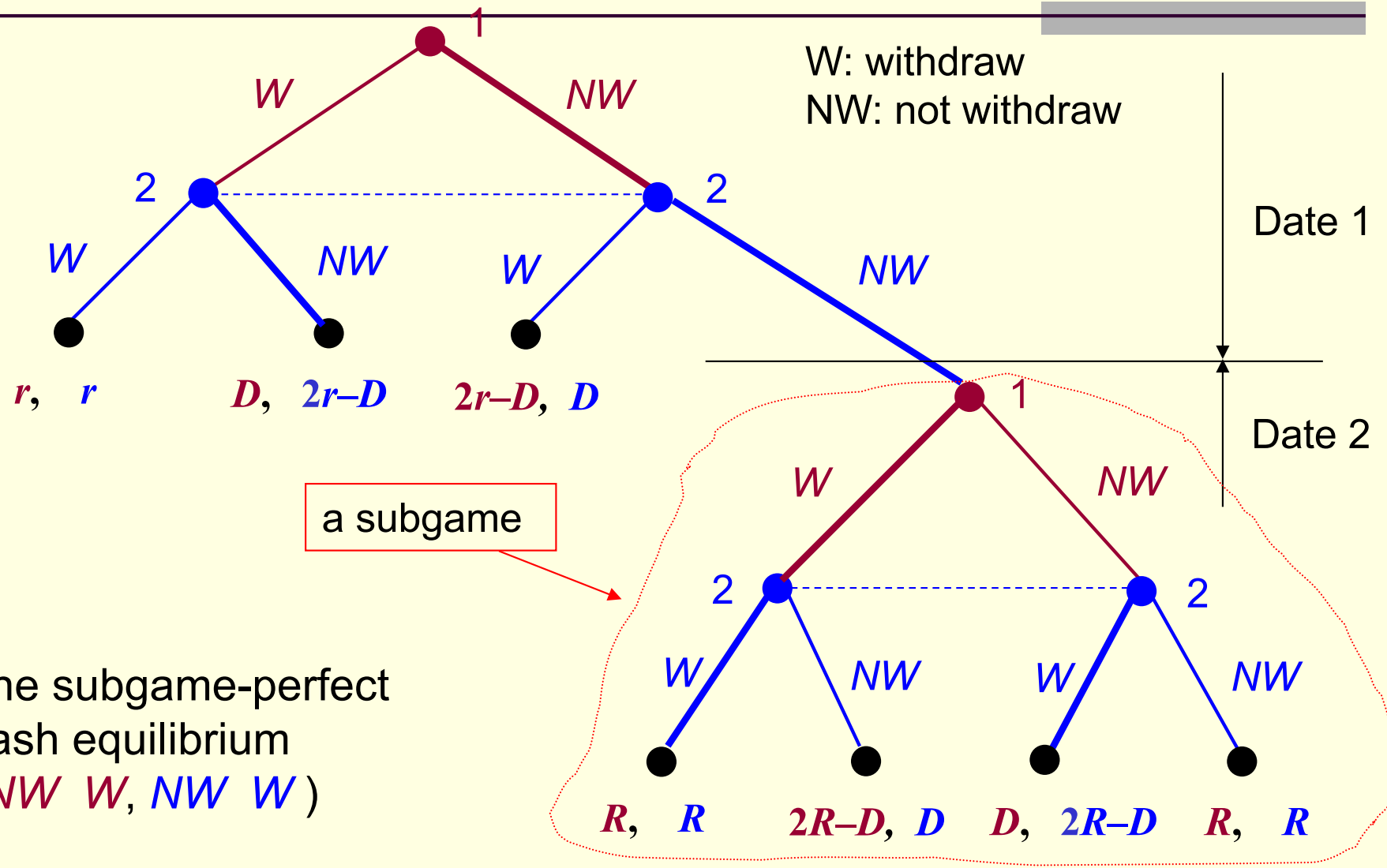
Bank runs (2.2.B of Gibbons)

- 两个投资者, 1 和 2, 每人存入银行一笔存款 D .
- 银行已将这些存款投入一个长期项目. 如果在该项目到期前银行被迫对投资者变现, 共可收回 $2r$, 这里 $D > r > D/2$.
- 如果银行允许投资到期, 则项目共可取得 $2R$, 这里 $R > D$.
- 有两个日期, 投资者可以从银行提款.

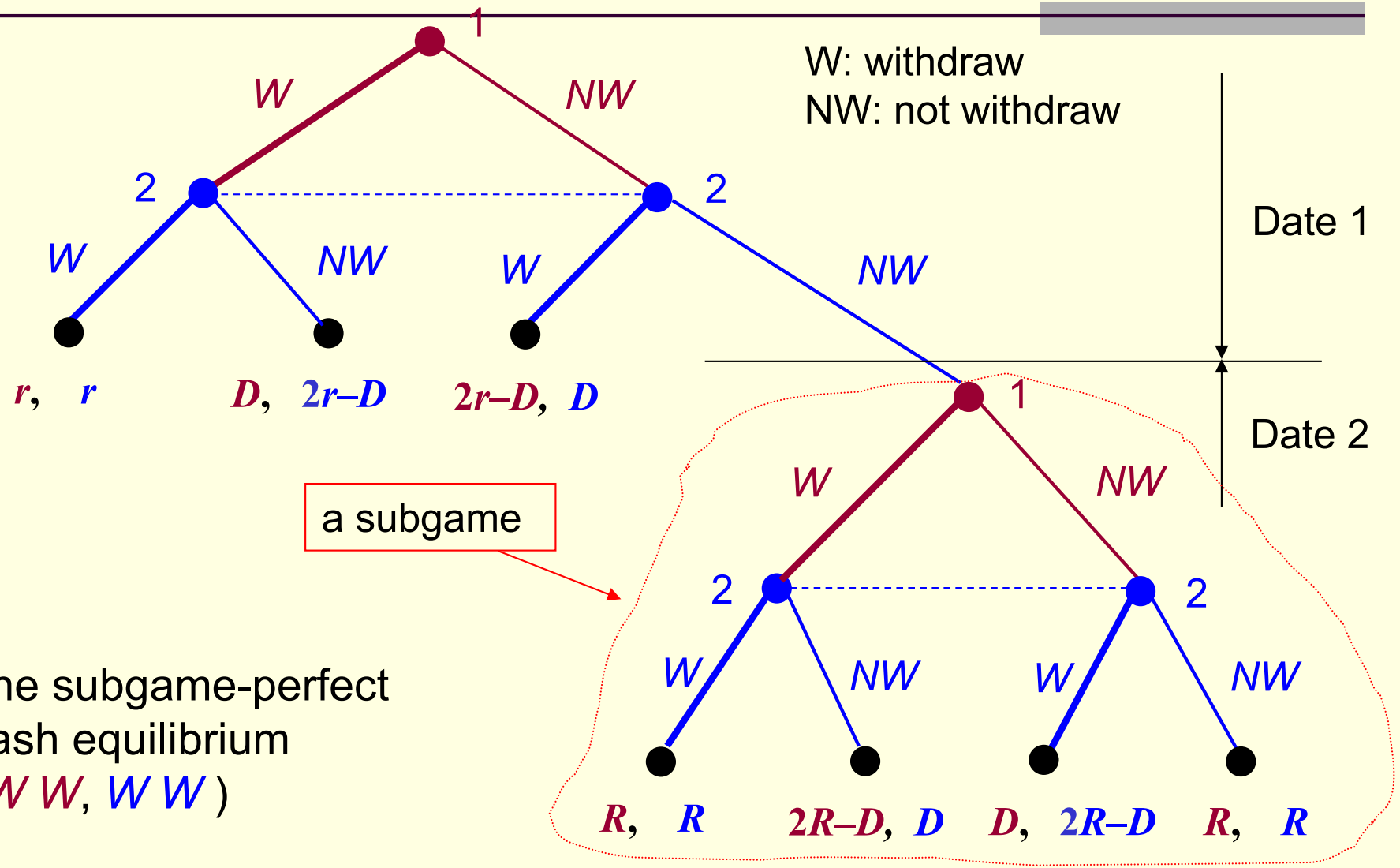
Bank runs: timing of the game

- 博弈的时间顺序如下
- 日期 1 (银行的投资项目到期之前)
 - 两个投资者同时行动
 - 如果两个投资者都提款, 则每人可得到 r , 博弈结束
 - 如果只有一个投资者提款, 则她可得到 D , 另一个投资者可得到 $2r-D$, 博弈结束(注意 $r > 2r-D$)
 - 如果两人都不提款, 则项目结束后在日期2博弈继续.
- 日期 2 (银行的投资项目到期之后)
 - 两个投资者同时行动
 - 如果两个投资者都提款, 则每人可得到 R , 博弈结束
 - 如果只有一个投资者提款, 则她可得到 $2R-D$, 另一个投资者可得到 D , 博弈结束 (注意 $2R-D > R$)
 - 如果两个投资者都不提款, 则银行向每个投资者返还 R , 博弈结束.

Bank runs: game tree



Bank runs: game tree



Tariffs and imperfect international competition (2.2.C of Gibbons)

- 两个完全相同的国家, 1 和 2, 同时选择它们的关税税率, 分别记为 t_1, t_2, \dots
- 来自 country 1 的 Firm 1 和来自 country 2 的 firm 2 生产同质的产品供给本国消费和出口.
- 观察到两国的税率后, firm 1 和 2 同时选择用于本国消费和出口的产品数量, 分别用 (h_1, e_1) 和 (h_2, e_2) 表示.
- 两个国家的市场价格 $P_i(Q_i) = a - Q_i$, for $i=1, 2$.
- $Q_1 = h_1 + e_2, Q_2 = h_2 + e_1$.
- 两个企业的边际成本为常数 c .
- 每个企业在向其他国家出口时都要支付关税.

Tariffs and imperfect international competition

Firm 1 的收益是它的利润:

$$\pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_1 + e_2)]h_1 + [a - (e_1 + h_2)]e_1 - c(h_1 + e_1) - t_2 e_1$$

Firm 2 的收益是它的利润:

$$\pi_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_2 + e_1)]h_2 + [a - (e_2 + h_1)]e_2 - c(h_2 + e_2) - t_1 e_2$$

Tariffs and imperfect international competition

Country 1 的收益是它的总福利: country 1 的消费者所享有的消费者剩余之和, firm 1 的利润以及关税收入

$$W_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = \frac{1}{2} Q_1^2 + \pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) + t_1 e_2$$

这里 $Q_1 = h_1 + e_2$.

Country 2 的收益是它的总福利: country 2 的消费者所享有的消费者剩余之和, firm 2 的利润以及关税收入

$$W_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = \frac{1}{2} Q_2^2 + \pi_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) + t_2 e_1$$

这里 $Q_2 = h_2 + e_1$.

Backward induction: subgame between the two firms

对于任何给定的关税税率组合 (t_1, t_2) ，我们可以找到两个企业间子博弈的纳什均衡。

Firm 1 maximizes

$$\pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_1 + e_2)]h_1 + [a - (e_1 + h_2)]e_1 - c(h_1 + e_1) - t_2 e_1$$

$$a - 2h_1 - e_2 - c = 0 \Leftrightarrow h_1 = \frac{1}{2}(a - e_2 - c)$$

FOC:

$$a - 2e_1 - h_2 - c - t_2 = 0 \Leftrightarrow e_1 = \frac{1}{2}(a - h_2 - c - t_2)$$

Firm 2 maximizes

$$\pi_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_2 + e_1)]h_2 + [a - (e_2 + h_1)]e_2 - c(h_2 + e_2) - t_1 e_2$$

$$a - 2h_2 - e_1 - c = 0 \Leftrightarrow h_2 = \frac{1}{2}(a - e_1 - c)$$

FOC:

$$a - 2e_2 - h_1 - c - t_1 = 0 \Leftrightarrow e_2 = \frac{1}{2}(a - h_1 - c - t_1)$$

Backward induction: subgame between the two firms

对于任何给定的关税税率组合 (t_1, t_2) ，我们可以找到两个企业间子博弈的纳什均衡。

给定 (t_1, t_2) ，子博弈的纳什均衡应该满足这几个方程。

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{1}{2}(a - e_2 - c) & h_2 &= \frac{1}{2}(a - e_1 - c) \\e_1 &= \frac{1}{2}(a - h_2 - c - t_2) & e_2 &= \frac{1}{2}(a - h_1 - c - t_1)\end{aligned}$$

解这几个方程可以得到

$$\begin{aligned}h_1^* &= \frac{1}{3}(a - c + t_1) & e_1^* &= \frac{1}{3}(a - c - 2t_2) \\h_2^* &= \frac{1}{3}(a - c + t_2) & e_2^* &= \frac{1}{3}(a - c - 2t_1)\end{aligned}$$

Backward induction: whole game

两个国家都知道两个企业对于组合 (t_1, t_2) 的最优组合

Country 1 最大化($Q_1 = h_1 + e_2$)

$$W_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = \frac{1}{2}Q_1^2 + \pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) + t_1 e_2$$

将我们前面得到的带入 country 1 的目标函数

$$\begin{aligned} & \frac{1}{18}(2(a-c)-t_1)^2 + (a - \frac{2}{3}(a-c) + \frac{1}{3}t_1) \times \frac{1}{3}(a-c+t_1) + (a - \frac{2}{3}(a-c) - \frac{1}{3}t_2) \times \frac{1}{3}(a-c-2t_2) \\ & - c(\frac{2}{3}(a-c) + \frac{1}{3}(t_1 - 2t_2)) - t_2 \times \frac{1}{3}(a-c-2t_2) + t_1 \times \frac{1}{3}(a-c-2t_1) \end{aligned}$$

FOC:

$$t_1 = \frac{1}{3}(a-c)$$

对称的, 我们也可以得到

$$t_2 = \frac{1}{3}(a-c)$$

Tariffs and imperfect international competition

子博弈完美纳什均衡

$$\left(t_1^* = \frac{1}{3}(a-c), t_2^* = \frac{1}{3}(a-c), \left(\begin{array}{l} h_1 = \frac{1}{3}(a-c+t_1) \\ e_1 = \frac{1}{3}(a-c-2t_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} h_2 = \frac{1}{3}(a-c+t_2) \\ e_2 = \frac{1}{3}(a-c-2t_1) \end{array} \right) \right)$$

子博弈完美解 (subgame-perfect outcome)

$$\left(t_1^* = \frac{1}{3}(a-c), t_2^* = \frac{1}{3}(a-c), \left(\begin{array}{l} h_1^* = \frac{4}{9}(a-c) \\ e_1^* = \frac{1}{9}(a-c) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} h_2^* = \frac{4}{9}(a-c) \\ e_2^* = \frac{1}{9}(a-c) \end{array} \right) \right)$$

Repeated game

- 在一个完全信息动态博弈中，同一个（同时行动）的博弈进程至少进行了两次，并且在下一个进程进行前，所有以前的博弈进程都可被观察到，这样的动态博弈就是**重复博弈**.
- 我们将探究重复博弈中参与人的行为.

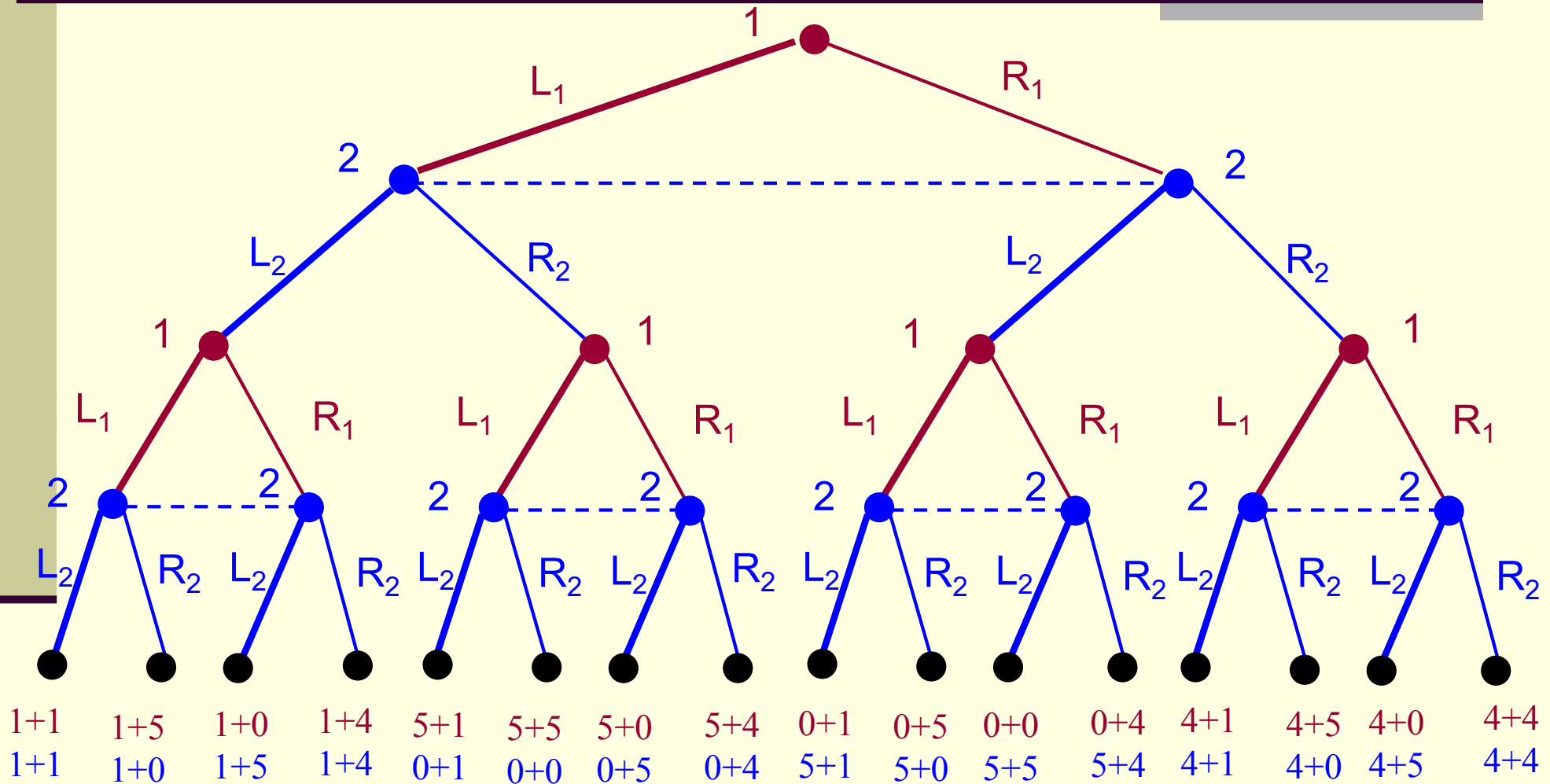
Two-stage repeated game

■ 两阶段囚徒困境

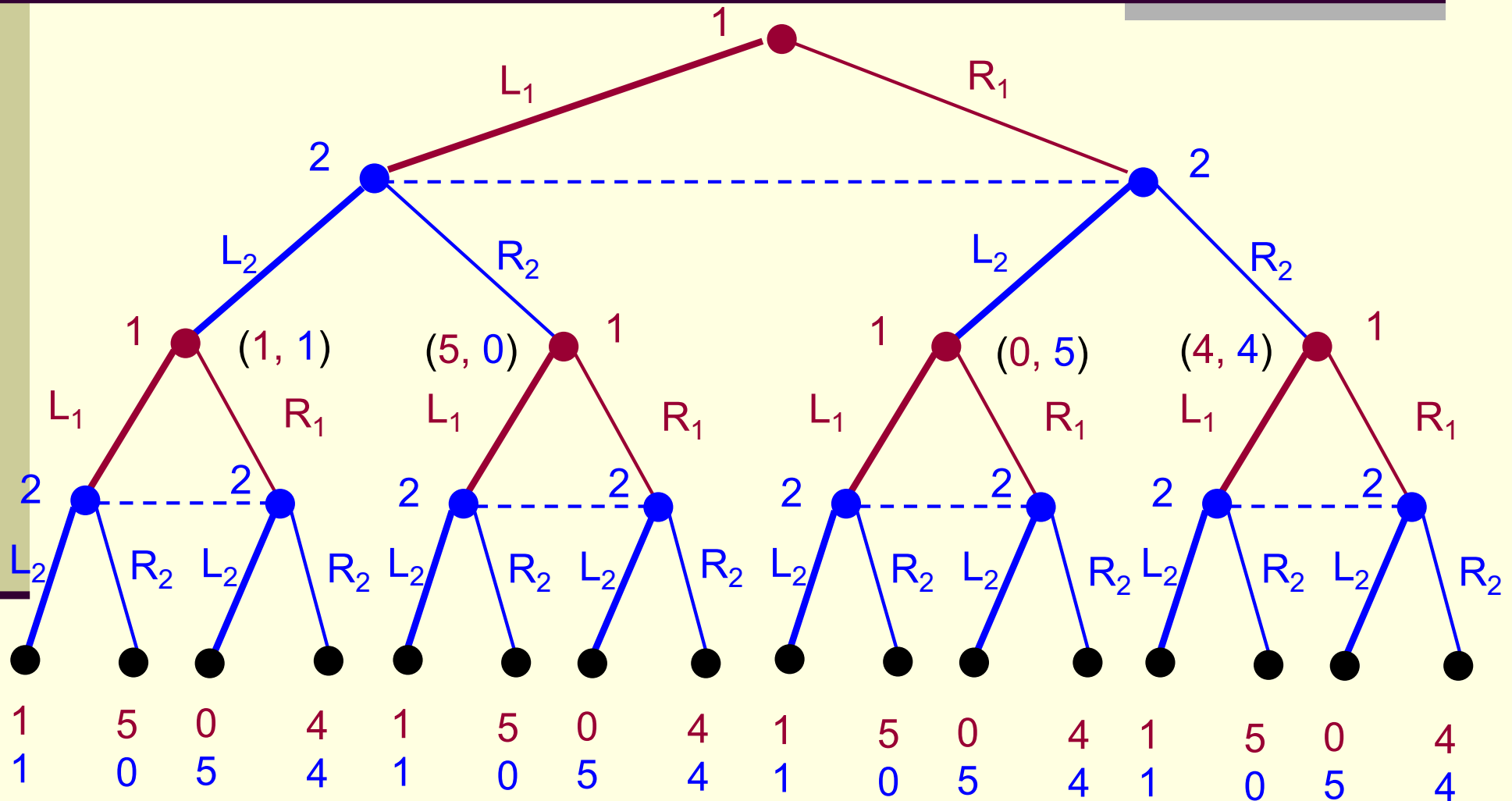
- 两个参与人要把以下同时行动博弈重复进行两次
- 第二次博弈开始前可观察到第一次进行的结果
- 整个博弈的收益等于两阶段各自收益的加总. 即贴现因子 (discount factor) 等于1.
- Question: what is the subgame perfect Nash equilibrium?

		Player 2	
		L ₂	R ₂
Player 1	L ₁	1 , 1	5 , 0
	R ₁	0 , 5	4 , 4

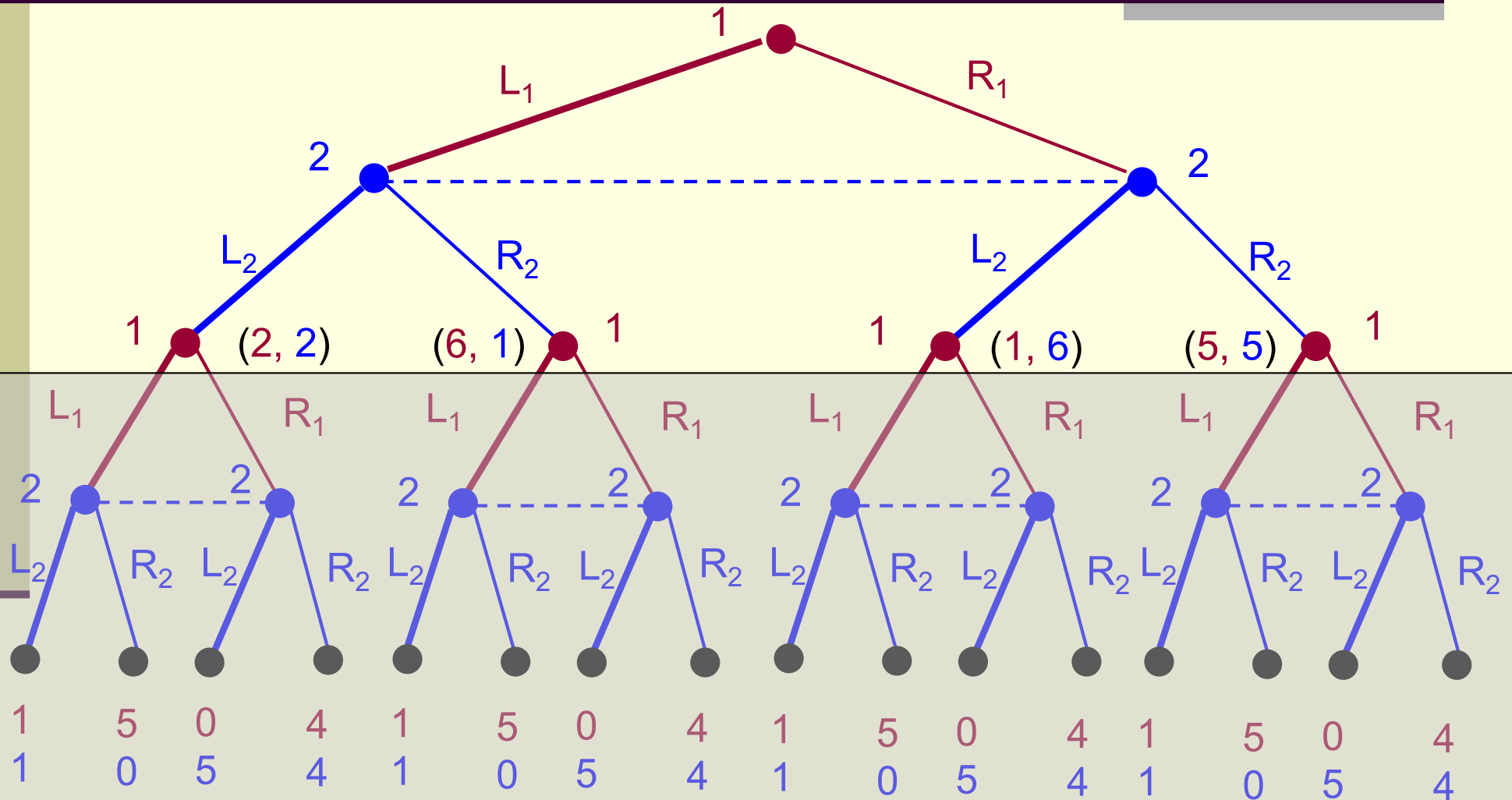
Game tree of the two-stage prisoners' dilemma



Informal game tree of the two-stage prisoners' dilemma



Informal game tree of the two-stage prisoners' dilemma



two-stage prisoners' dilemma

- 子博弈完美纳什均衡

$(L_1 L_1 L_1 L_1 L_1, L_2 L_2 L_2 L_2 L_2)$

Player 1在第1阶段选择 L_1 , 并且无论第1阶段结果是什么, 第2阶段都选择 L_1 .

Player 2在第1阶段选择 L_2 , 并且无论第1阶段结果是什么, 第2阶段都选择 L_2 .

		Player 2	
		L_2	R_2
Player 1	L_1	1 , 1	5 , 0
	R_1	0 , 5	4 , 4

two-stage prisoners' dilemma

- 子博弈完美纳什均衡

$(L_1 L_1 L_1 L_1 L_1, L_2 L_2 L_2 L_2 L_2)$

Player 1 在第1阶段 选择 L_1 , 并且无论第1阶段结果是什么, 第2阶段都选择 L_1 .

Player 2 在第1阶段 选择 L_2 , 并且无论第1阶段结果是什么, 第2阶段都选择 L_2 .

The payoff (1, 1) of the 2nd stage has been added to the first stage game.

		Player 2	
		L_2	R_2
Player 1	L_1	2 , 2	6 , 1
	R_1	1 , 6	5 , 5

Fininitely repeated game(p.65)

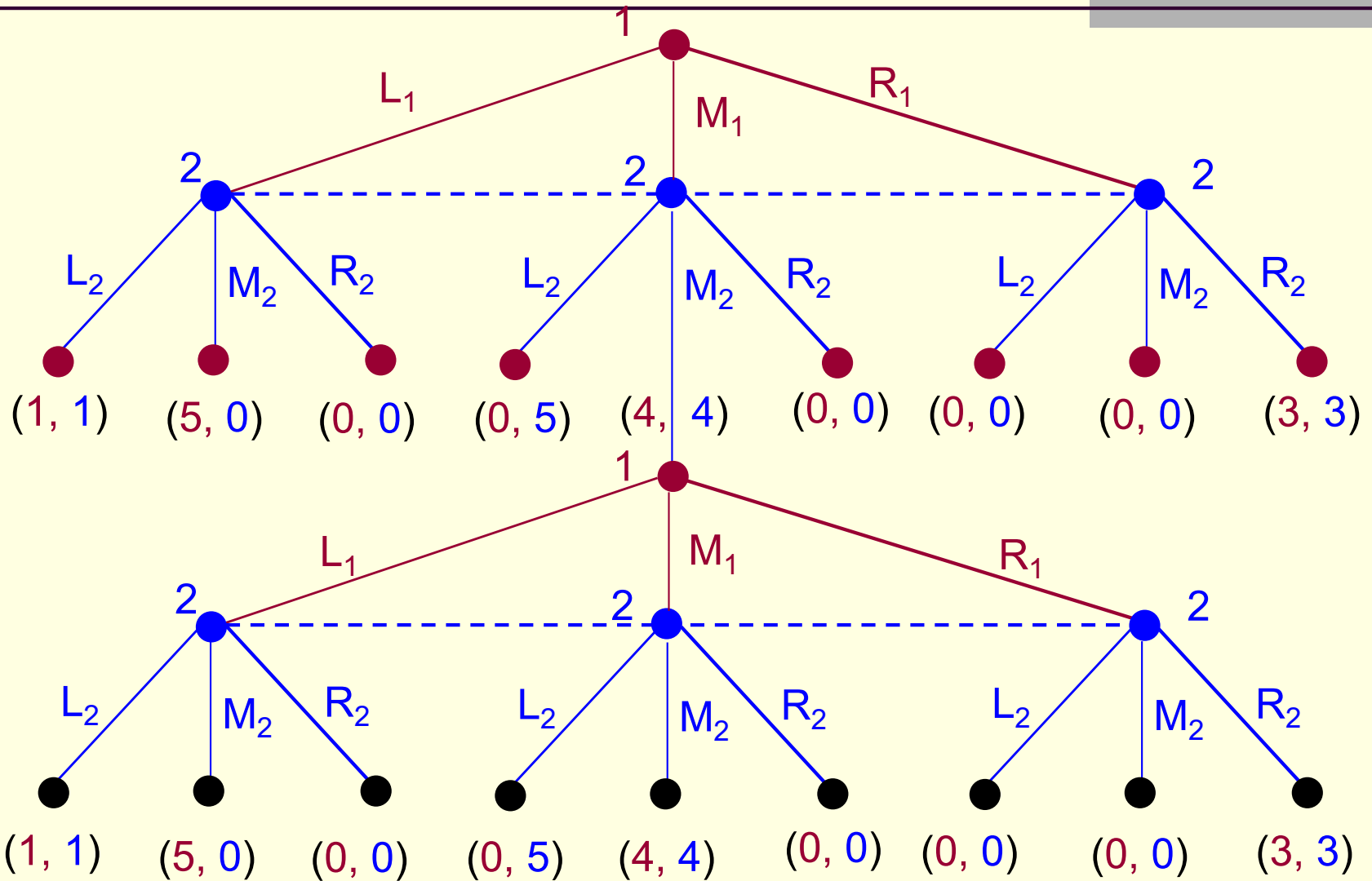
- 在一个完全信息动态博弈中，同一个（同时行动）的博弈进程至少进行了有限次，并且在下一个进程进行前，所有以前的博弈进程都可被观察到，这样的动态博弈就是一个**有限重复博弈**.
- 如果阶段博弈（同时行动博弈）有唯一的纳什均衡，那么这个有限重复博弈有唯一的子博弈完美纳什均衡. 重复博弈的每一阶段都会实现阶段博弈的纳什均衡.

What happens if the stage game has more than one Nash equilibrium? (p.66)

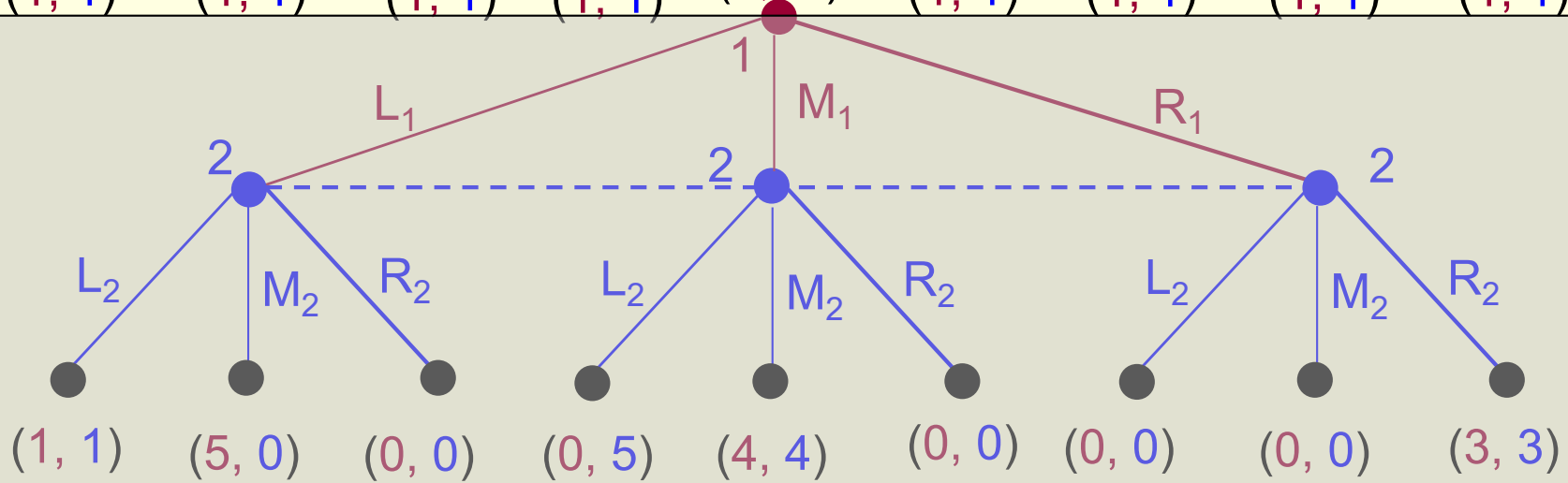
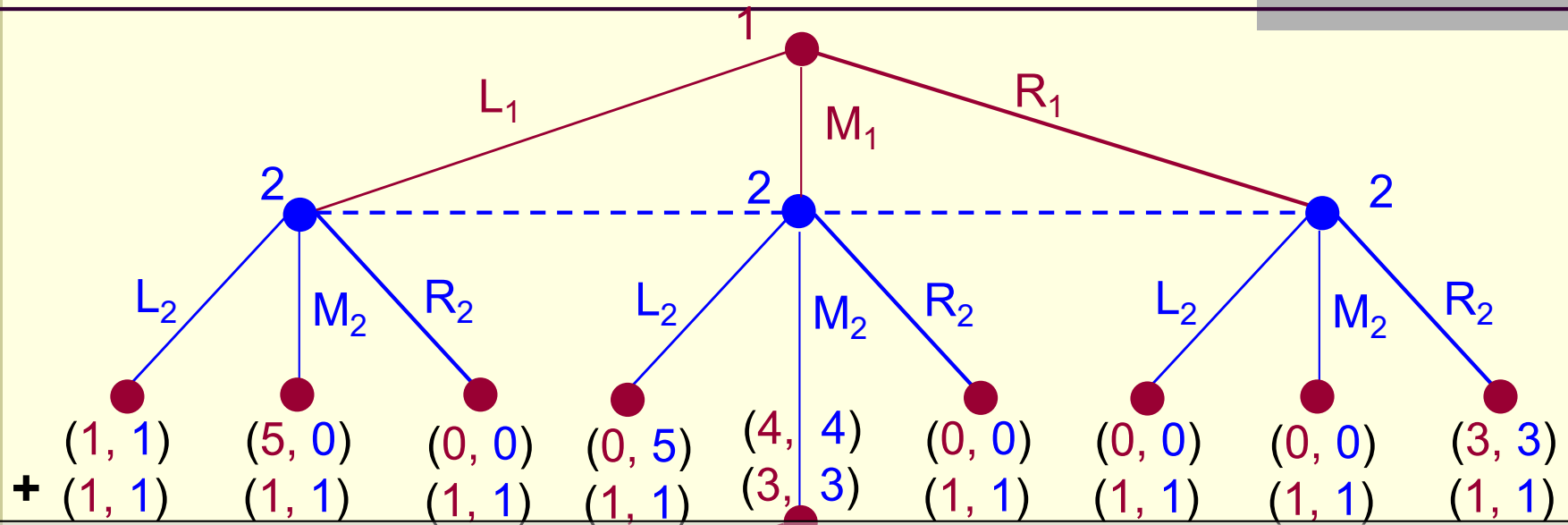
- 两个参与人要把以下同时行动博弈重复进行两次
- 第二次博弈开始前可观察到第一次进行的结果
- 整个博弈的收益等于两阶段各自收益的加总. 即贴现因子等于1.
- 问题: 如果 M_1, M_2 被选择, 我们能够找到一个子博弈完美纳什均衡吗? 或者说, 两个参与人在一个子博弈完美均衡中能够合作 (cooperate) 吗?

		Player 2		
		L_2	M_2	R_2
Player 1	L_1	<u>1</u> , <u>1</u>	5 , 0	0 , 0
	M_1	0 , 5	4 , 4	0 , 0
	R_1	0 , 0	0 , 0	<u>3</u> , <u>3</u>

Informal game tree



Informal game tree and backward induction



Two-stage repeated game

■ 子博弈完美纳什均衡:

- player 1在第1阶段选择 M_1 , 如果第1阶段结果是 (M_1, M_2) , 则第2阶段选择 R_1 , 如果第1阶段结果不是 (M_1, M_2) , 则第2阶段选择 L_1
- player 2在第1阶段选择 M_2 , 如果第1阶段结果是 (M_1, M_2) , 则第2阶段选择 R_2 , 如果第1阶段结果不是 (M_1, M_2) , 则第2阶段选择 L_2

		Player 2		
		L_2	M_2	R_2
Player 1	L_1	<u>1</u> , <u>1</u>	5 , 0	0 , 0
	M_1	0 , 5	4 , 4	0 , 0
	R_1	0 , 0	0 , 0	<u>3</u> , <u>3</u>

Two-stage repeated game

■ 子博弈完美纳什均衡:

- 在第1阶段, player 1选择 M_1 , player 2选择 M_2 .
- 在第2阶段,
 - 如果第1阶段结果为 (M_1, M_2) , 则player 1选择 plays R_1 ;
如果第1阶段结果不是 (M_1, M_2) , 则player 1选择 L_1
 - 如果第1阶段结果为 (M_1, M_2) , 则player 2选择 plays R_2 ;
如果第1阶段结果不是 (M_1, M_2) , 则player 2选择 L_2

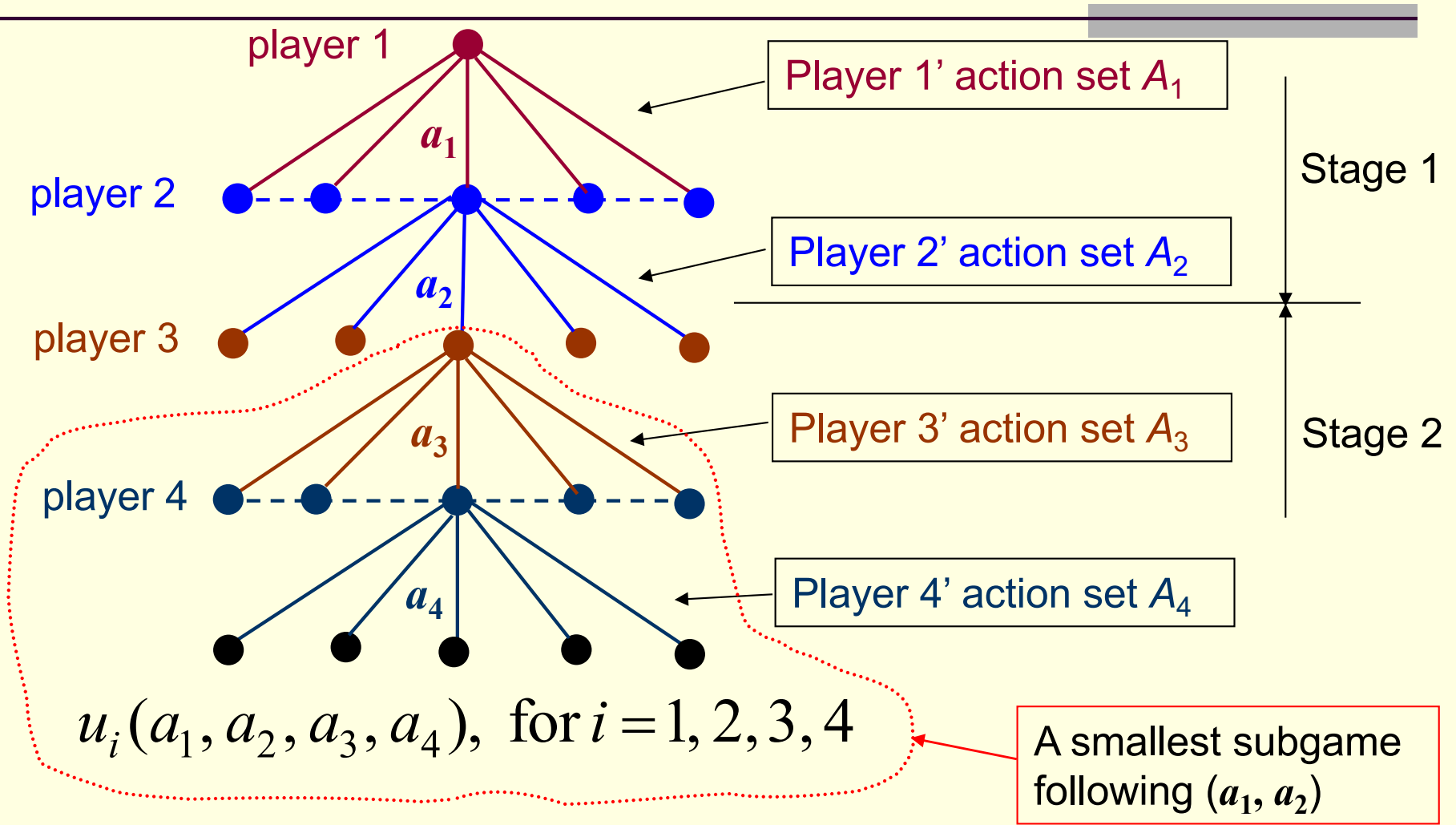
The payoffs of the 2nd stage has been added to the first stage game.

		Player 2		
		L_2	M_2	R_2
Player 1	L_1	$2, 2$	$6, 1$	$1, 1$
	M_1	$1, 6$	$7, 7$	$1, 1$
	R_1	$1, 1$	$1, 1$	$4, 4$

An abstract game: generalization of the tariff game(p.56, 64)

- 四个参与人: 1, 2, 3, 4. 博弈的时间顺序如下.
- 阶段1:
Player 1 和2 同时从可行行动集 (feasible action sets) A_1 和 A_2 中分别选择行动 a_1 和 a_2 .
- 阶段2:
在观察到第一阶段的结果 (a_1, a_2) 后, Player 3 和4同时从可行行动集 A_3 和 A_4 中分别选择行动 a_3 和 a_4 .
- 博弈结束.
- 收益是 $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$, 对于 $i=1, 2, 3, 4$

An abstract game: informal game tree



Backward induction: solve the smallest subgame

在*任何组合*之 (a_1, a_2) 后的最小的子博弈是一个 player 3 和 4 进行的同时行动博弈，它可以用下面的标准形式来表述：

- 参与者集合 (A set of players) : {player 3, player 4}
- 行动集 (Sets of actions) : A_3, A_4
- 收益 (Payoffs) :
 $u_3(a_1, a_2, a_3, a_4)$
 $u_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$

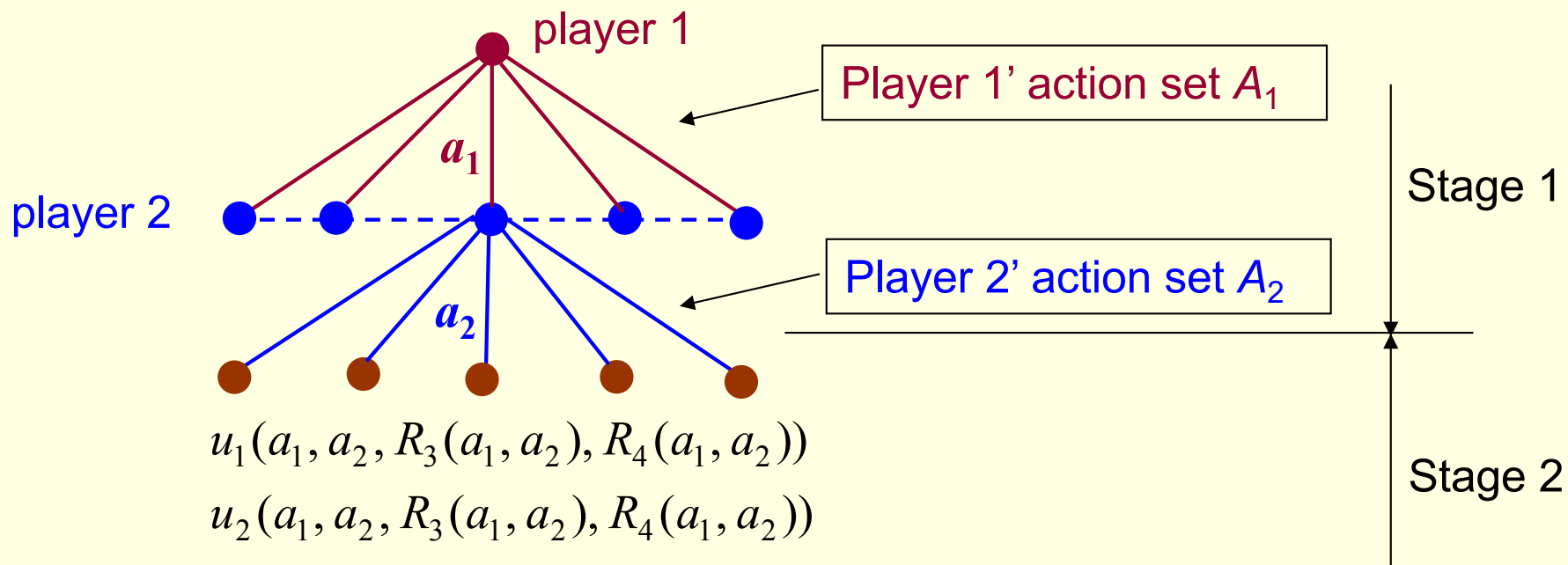
注意到当我们解这个 player 3 和 player 4 之间的同时行动博弈时， a_1, a_2 可以被认为是常数。

解出这个博弈，我们得到一个纳什均衡 (a_3^*, a_4^*) 。它们是 a_1 和 a_2 的函数，写成

$$a_3^* = R_3(a_1, a_2), \quad a_4^* = R_4(a_1, a_2)$$

它们实际上就是对 (a_1, a_2) 的最优反应函数。

Backward induction: back to the root



- 用 player 1 和 2 的收益来代替这个最小的子博弈.
- Player 1 和 2 知道如果她们分别选择 a_1 和 a_2 , 那么 player 3 和 4 将会分别选择 $a_3^* = R_3(a_1, a_2)$, $a_4^* = R_4(a_1, a_2)$.

Backward induction: back to the root

现在 player 1 和 2 进行同时行动博弈，这个博弈用下面的标准形式来表述：

- 参与者集合: {player 1, player 2}
- 行动集: A_1, A_2
- 收益: $u_1(a_1, a_2, R_3(a_1, a_2), R_4(a_1, a_2))$
 $u_2(a_1, a_2, R_3(a_1, a_2), R_4(a_1, a_2))$

解出这个博弈，我们得到一个纳什均衡 (a_1^*, a_2^*) 。

整个博弈的子博弈完美纳什均衡是

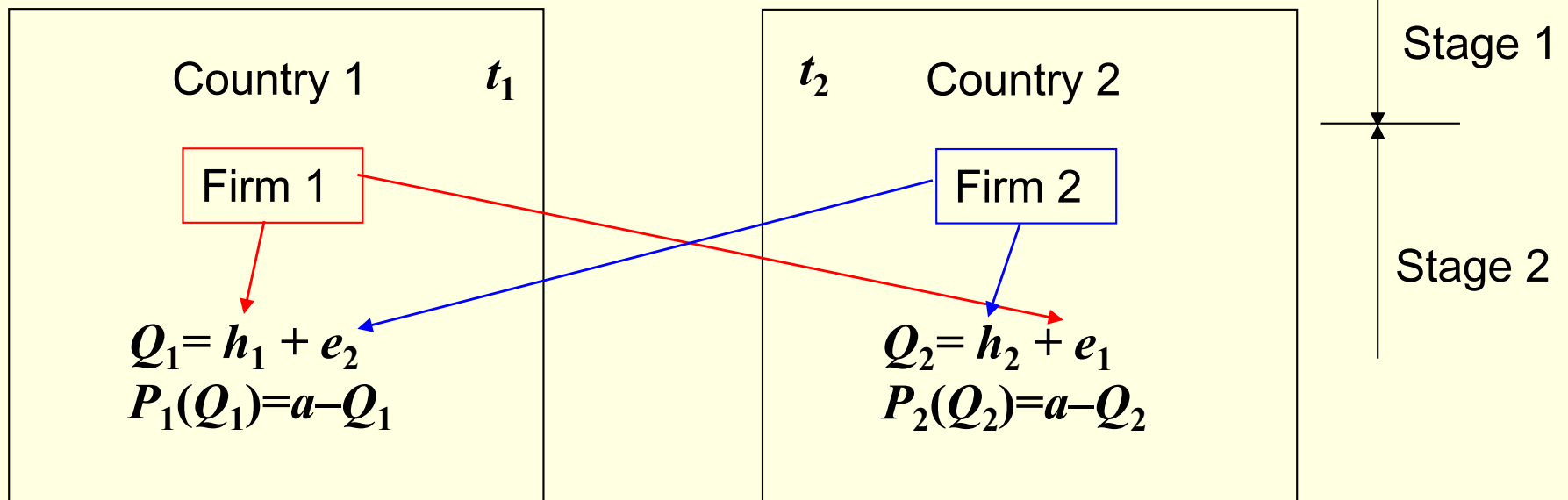
$$(a_1^*, a_2^*, R_3(a_1^*, a_2^*), R_4(a_1^*, a_2^*))$$

实际结果是 $(a_1^*, a_2^*, R_3(a_1^*, a_2^*), R_4(a_1^*, a_2^*))$ 。

Tariffs and imperfect international competition (2.2.C of Gibbons)

- 两个完全相同的国家, 1 和 2, 同时选择它们的关税税率, 分别记为 t_1, t_2, \dots
- 来自country 1的 Firm 1和来自country 2的 firm 2生产同质的产品供给本国消费和出口.
- 观察到两国的税率后, firm 1 and 2同时选择用于本国消费和出口的产品数量, 分别用 (h_1, e_1) 和 (h_2, e_2) 表示.
- 两个国家的市场价格 $P_i(Q_i) = a - Q_i$, for $i=1, 2$.
- $Q_1 = h_1 + e_2, Q_2 = h_2 + e_1$.
- 两个企业的边际成本为常数 c .
- 每个企业在向其他国家出口时都要支付关税.

Tariffs and imperfect international competition



- 这个模型适合前面的抽象模型.
- Country 1 和 2 分别是 player 1 和 2
- Firm 1 和 2 分别是 player 3 和 4

Backward induction: subgame between the two firms

在*任何组合*之 (t_1, t_2) 后的最小的子博弈是一个 firm 1 和 2 进行的同时行动博弈，它可以用下面的标准形式来表述：

- 参与人集合: {firm 1, firm 2}
- 行动集: $\left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ e_1 \end{pmatrix} : h_1 \geq 0, e_1 \geq 0 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} h_2 \\ e_2 \end{pmatrix} : h_2 \geq 0, e_2 \geq 0 \right\}$

- 收益:

$$\pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_1 + e_2)]h_1 + [a - (e_1 + h_2)]e_1 - c(h_1 + e_1) - t_2 e_1$$

$$\pi_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = [a - (h_2 + e_1)]h_2 + [a - (e_2 + h_1)]e_2 - c(h_2 + e_2) - t_1 e_2$$

注意到当我们解 firm 1 and firm 2 之间的同时行动博弈时， t_1, t_2 可以被看作常数。

解出这个博弈，我们得到一个纳什均衡 (a_3^*, a_4^*) 。它们是 t_1 和 t_2 的函数，写成

$$h_1^* = R_{F1}^h(t_1, t_2), e_1^* = R_{F1}^e(t_1, t_2), h_2^* = R_{F2}^h(t_1, t_2), e_2^* = R_{F2}^e(t_1, t_2)$$

它们实际是就是对的最优反应函数 (t_1, t_2) 。

Backward induction: subgame between the two firms

在以前的课程中，我们找到了两个企业之间任意组合 (t_1, t_2) 构成的子博弈的以下纳什均衡。

$$h_1^* = R_{F1}^h(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(a - c + t_1)$$

$$e_1^* = R_{F1}^e(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(a - c - 2t_2)$$

$$h_2^* = R_{F2}^h(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(a - c + t_2)$$

$$e_2^* = R_{F2}^e(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(a - c - 2t_1)$$

它们是 t_1 和 t_2 的函数。

Backward induction: back to the root

现在 country 1 和 2 进行一个同时行动博弈，用以下标准形式表述：

- 参与人集合: {country 1, country 2}
- 行动集: $\{t_1 : t_1 \geq 0\}$, $\{t_2 : t_2 \geq 0\}$
- 收益:

$$W_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = W_1(t_1, t_2, R_{F1}^h(t_1, t_2), R_{F1}^e(t_1, t_2), R_{F2}^h(t_1, t_2), R_{F2}^e(t_1, t_2))$$

$$W_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) = W_2(t_1, t_2, R_{F1}^h(t_1, t_2), R_{F1}^e(t_1, t_2), R_{F2}^h(t_1, t_2), R_{F2}^e(t_1, t_2))$$

回忆一下，两个国家都知道如果它们分别选择 t_1 和 t_2 ，那么两个企业将会选择上面幻灯片所给出的行动。

下面我们就像以前课程所做的那样来解出两个国家之间的同时行动博弈，得到以下纳什均衡。

$$t_1^* = \frac{1}{3}(a - c) \quad t_2^* = \frac{1}{3}(a - c)$$

Tariffs and imperfect international competition

子博弈完美纳什均衡

$$\left(t_1^* = \frac{1}{3}(a-c), t_2^* = \frac{1}{3}(a-c), \left(\begin{array}{l} h_1 = \frac{1}{3}(a-c+t_1) \\ e_1 = \frac{1}{3}(a-c-2t_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} h_2 = \frac{1}{3}(a-c+t_2) \\ e_2 = \frac{1}{3}(a-c-2t_1) \end{array} \right) \right)$$

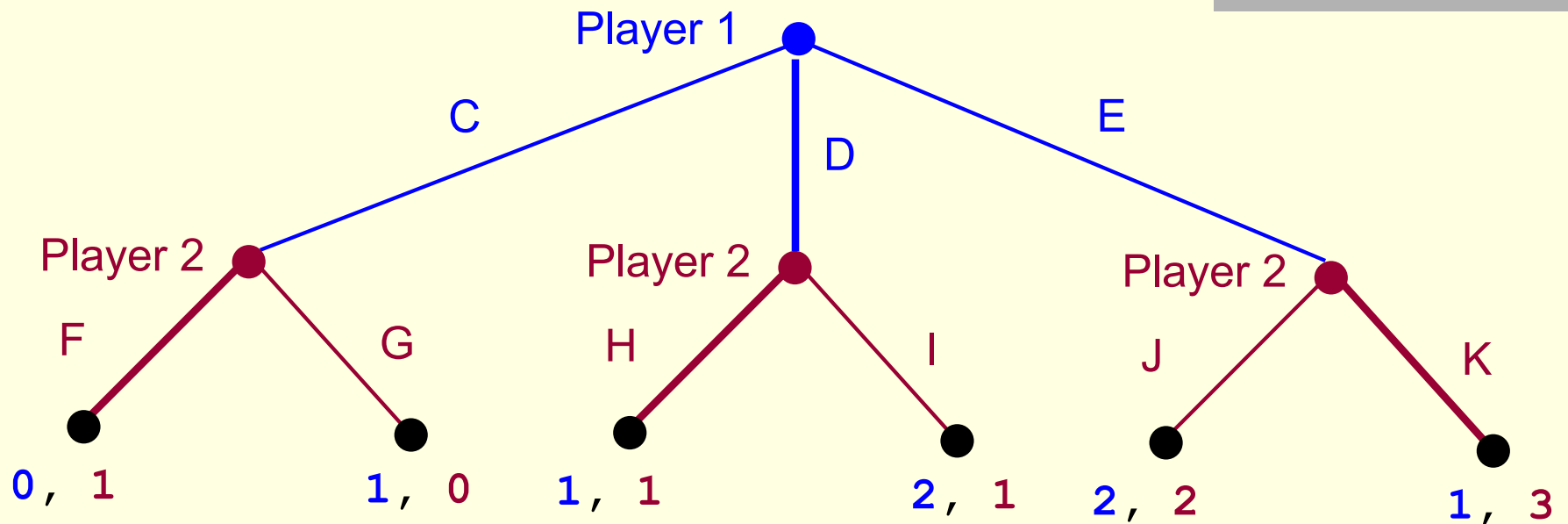
子博弈完美解

$$\left(t_1^* = \frac{1}{3}(a-c), t_2^* = \frac{1}{3}(a-c), \left(\begin{array}{l} h_1^* = \frac{4}{9}(a-c) \\ e_1^* = \frac{1}{9}(a-c) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} h_2^* = \frac{4}{9}(a-c) \\ e_2^* = \frac{1}{9}(a-c) \end{array} \right) \right)$$

重要定义 (p.98)

- 定义 在第2.1.A节定义的完全且完美信息两阶段博弈中，**逆向归纳解**为 $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ ，但**子博弈完美纳什均衡**为 $(a_1^*, R_2(a_1))$ 。
- 定义 在第2.2.A节定义的完全且不完美信息两阶段博弈中，**子博弈完美解**为 $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$ ，但**子博弈完美纳什均衡**为 $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$

Multiple subgame-perfect Nash equilibria: illustration



- 子博弈完美纳什均衡(D, FHK).
 - player 1选 D
 - 如果player 1选C， player 2选 F,如果player 1选D， player 2选 H,如果player 1选E， player 2选 K.

Infinitely repeated game

- 在一个完全信息动态博弈中，如果一个同时行动博弈（被称为*阶段博弈*）进行无限次，并且上一阶段博弈的结果在下一阶段博弈进行前可以被观察到，那么这个完全信息动态博弈就是一个*无限重复博弈*。
- 就是说,在阶段 $1, 2, 3, \dots, t-1, t, t+1, \dots$ 进行同时行动博弈。前 $t-1$ 阶段的所有结果在第 t 阶段时都可以被观察到。
- 每个参与人都会用一个贴现因子 δ 进行贴现，这里 $0 < \delta < 1$
- 重复博弈中参与人的收益是参与人从每阶段博弈中获得的收益的现值。

Present value

定义: 给定贴现因子 δ , 收益的无限序列 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots$ 的现值为

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \delta^3\pi_4 + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t$$

例 1: 收益的无限序列 $1, 1, 1, \dots$ ($\pi_t = 1$, for all t) 的现值是 $\frac{1}{1-\delta}$.

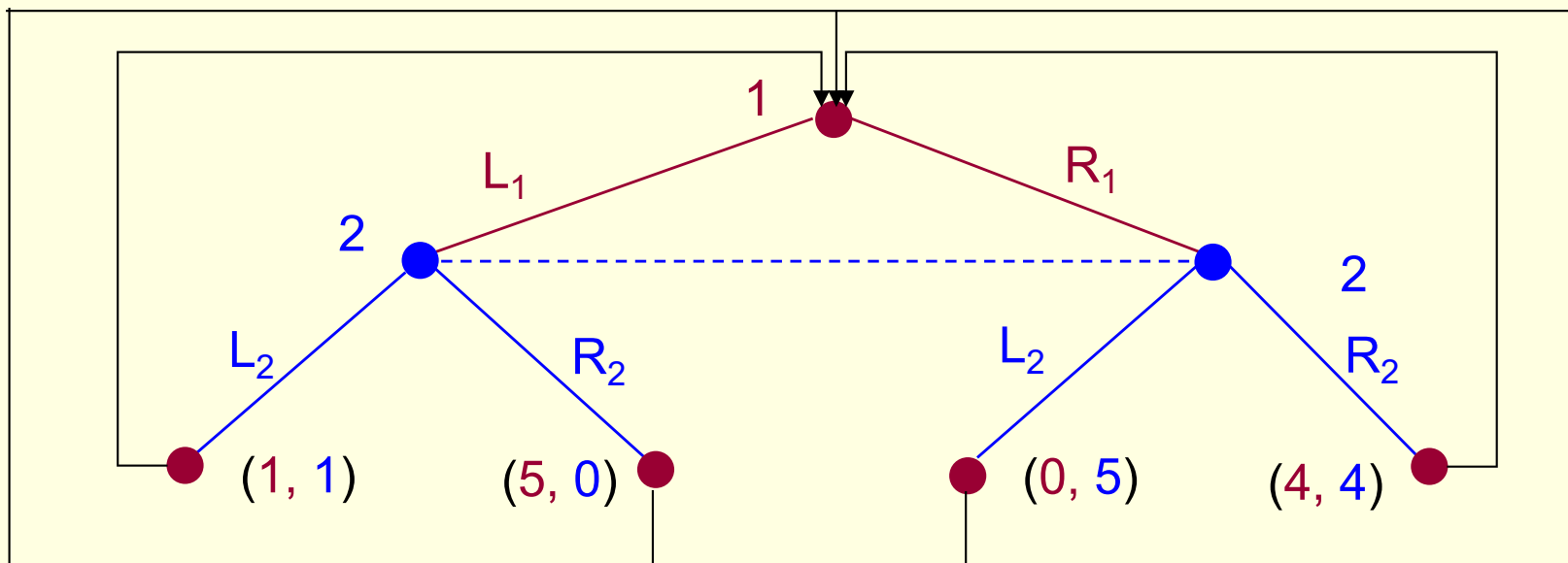
例 2: 收益的无限序列 $4, 1, 4, 1, 4, 1, \dots$ (每个奇数阶段为 4, 偶数阶段为 1) 的现值是 $\frac{4}{1-\delta^2} + \frac{\delta}{1-\delta^2}$.

Infinitely repeated game: example

- 下面的同时行动博弈是无限重复博弈
- 下一次博弈开始前所有以前的博弈结果都可以被观察到
- 无限重复博弈每个参与人的收益是她所有阶段得到的收益的现值.
- 问题: 子博弈完美纳什均衡是什么?

		Player 2	
		L ₂	R ₂
Player 1	L ₁	<u>1</u> , <u>1</u>	5 , 0
	R ₁	0 , 5	4 , 4

Example: subgame



- 无限重复博弈的每个子博弈等同于整个博弈.

Example: strategy

- 参与人的策略是一个完整的计划.它依赖于博弈进行的历史.
- player i 的一个策略: 在每个阶段（或者每个信息集）选择 L_i
- player i 的其他策略被称为**触发策略**（*trigger strategy*）:在第1阶段选择 R_i ; 如果以前所有 $t-1$ 阶段的结果均为 (R_1, R_2) ，那么第 t 阶段选择 R_i ，否则第 t 阶段选择 L_i .

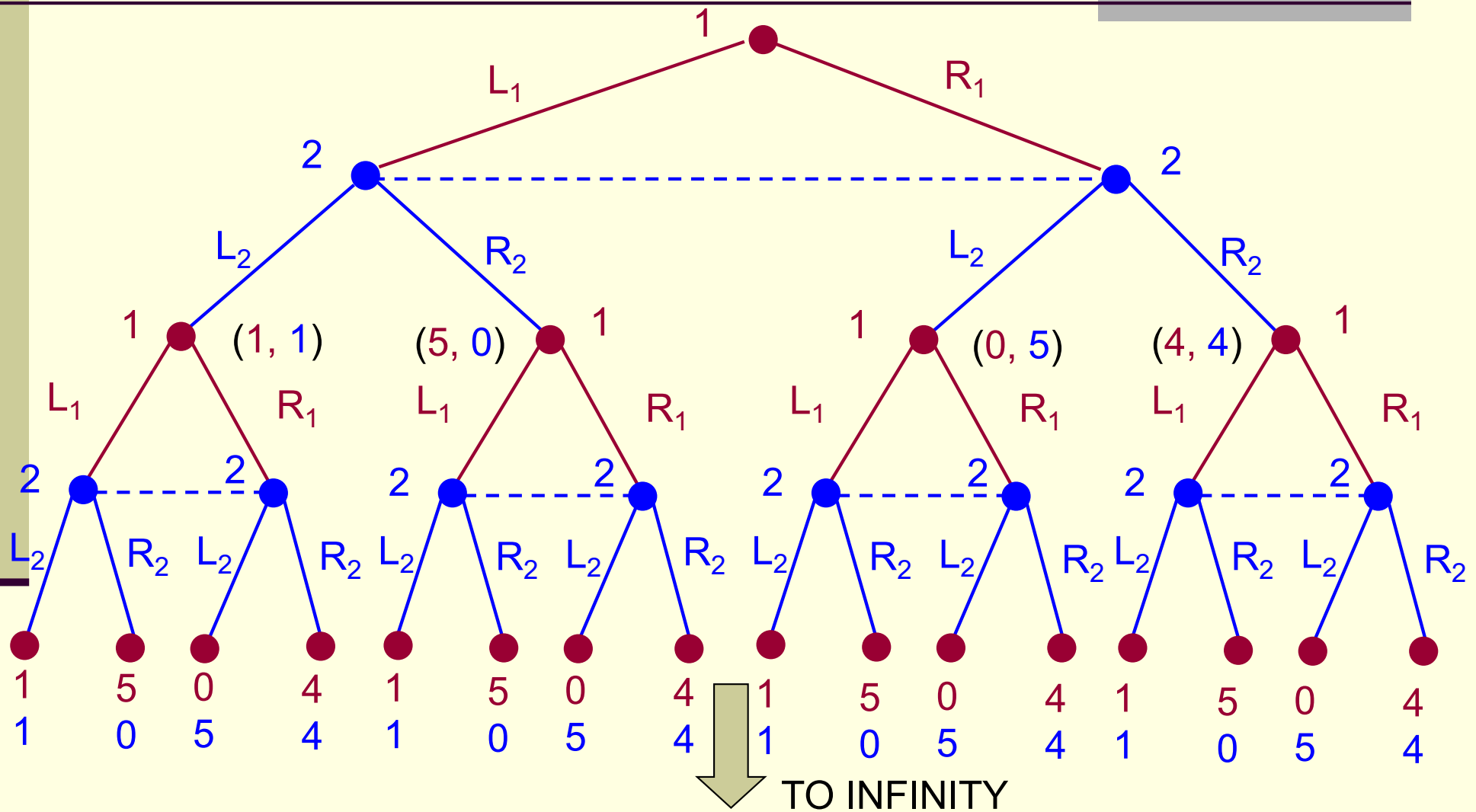
Example: subgame perfect Nash equilibrium

- 检查一下，如果**player i** 在每一阶段（或者她的每个信息集）都选择 **L_i** ，这是否是一个子博弈完美纳什均衡。
- 这可以分以下两步进行。
- 第1步: 检查这个策略组合是否是无限重复博弈的一个纳什均衡。
 - 如果**player 1**每个阶段都选择 **L_1** ,那么 **player 2** 每个阶段的最优反应都是选择 **L_2** .
 - 如果**player 2**每个阶段都选择 **L_2** , 那么**player 1** 每个阶段的最优反应都是选择 **L_1** .
 - 所以,它是无限重复博弈的一个纳什均衡.

Example: subgame perfect Nash equilibrium cont'd

- 第2步:检查这个无限重复博弈纳什均衡是否在无限重复博弈的每个子博弈中都能推导出一个纳什均衡.
 - 回忆一下:无限重复博弈的每一个子博弈等同于无限重复博弈总体
 - 显然,在每一个子博弈中它都能推导出一个纳什均衡
- 所以,它是一个子博弈完美纳什均衡.

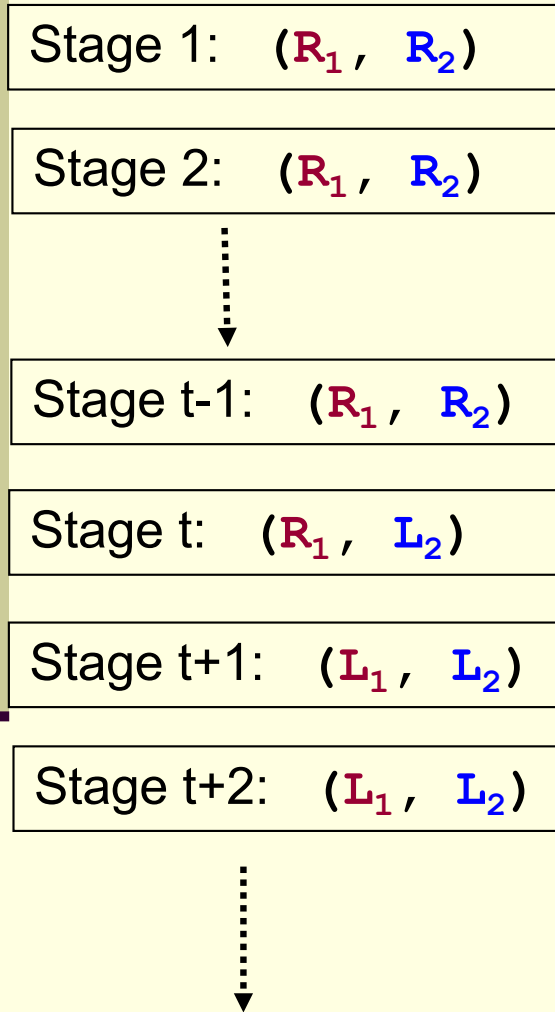
Example: subgame



Trigger strategy

- player i 的**触发策略**:在第1阶段选择 R_i ; 如果以前所有 $t-1$ 阶段的结果均为 (R_1, R_2) , 那么第 t 阶段选择 R_i , 否则第 t 阶段选择 L_i .
- 检查一下每个参与人都采取触发策略是否存在一个子博弈完美纳什均衡.
- 这可以分以下两步进行.
 - 第1步: 检查触发策略组合是否是无限重复博弈的一个纳什均衡
 - 第2步: 如果是,检查这个纳什均衡是否在每一个子博弈中都可以推导出一个纳什均衡

Trigger strategy: step 1



- 假定 player 1 采取触发策略.
- player 2 如果在阶段 t 偏离触发策略, 她可以获得更高的收益吗?
- 如果她在阶段 t 及以后继续实行触发策略, 那么她将会得到一个收益序列 $4, 4, 4, \dots$ (从阶段 t 到阶段 $+\infty$). 把这些收益贴现到阶段 t 可以得到

$$4 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + \dots = \frac{4}{1-\delta}$$

- 如果她在阶段 t 偏离了触发策略, 那么她必将触发不合作. Player 1 将会在阶段 t 后永远选择 L_1 . Player 2 的最优反应是 L_2 . 所以 player 2 将会得到收益序列 $5, 1, 1, 1 \dots$ (从阶段 t 到阶段 $+\infty$). 把这些收益贴现到阶段 t 可以得到

$$5 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Trigger strategy: step 1 cont'd

Stage 1: (R_1, R_2)

Stage 2: (R_1, R_2)



Stage t-1: (R_1, R_2)

Stage t: (R_1, L_2)

Stage t+1: (L_1, L_2)

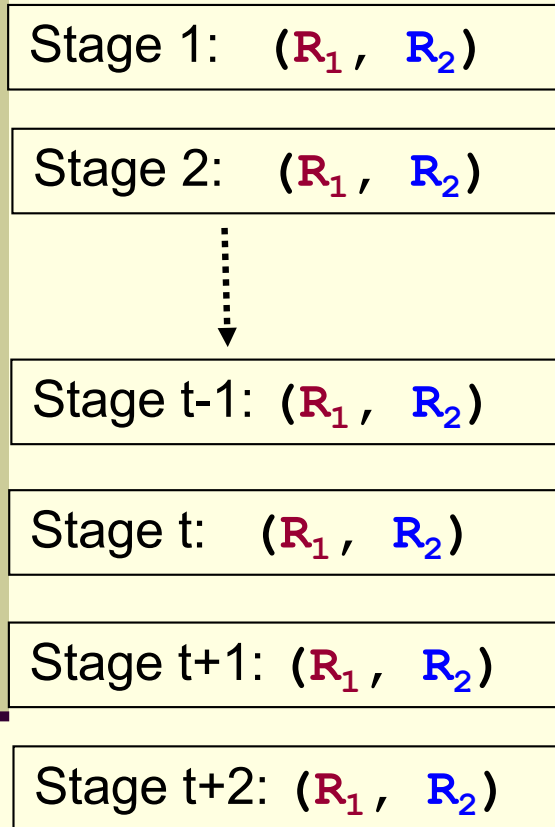
Stage t+2: (L_1, L_2)



$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$$

- 因此, 如果 $\delta \geq \frac{1}{4}$, player 2 偏离触发策略不会使她的境况得到改善.
- 这意味着在 $\delta \geq \frac{1}{4}$ 的情况下, 如果 player 1 采取触发策略, player 2 的最优反应也是触发策略.
- 对称的, 如果 player 2 采取触发策略, player 1 的最优反应也是触发策略.
- 所以如果 $\delta \geq \frac{1}{4}$, 两个参与人都采取触发策略存在一个纳什均衡.

Trigger strategy: step 2



- 第2步:检查这个纳什均衡是否在无限重复博弈的每一个子博弈中都可以推导出一个纳什均衡.
 - 回忆一下: 无限重复博弈的每一个子博弈等同于无限重复博弈总体

Trigger strategy: step 2 cont'd

- 我们两类（**classes**）子博弈：
 - 前面所有阶段的结果都是 (R_1, R_2) 之后的子博弈
 - 前面至少有一个阶段的结果不是 (R_1, R_2) 之后的子博弈
- 对第一类子博弈来说，无限重复博弈纳什均衡推导出一个纳什均衡，此时每个参与人仍然选择触发策略
- 对第二类子博弈来说，无限重复博弈纳什均衡推导出一个纳什均衡，此时参与人永远选择 (L_1, L_2) .

相关重要定义 (p.72-p.74)

- **策略**：在有限重复博弈 $G(T)$ 或无限重复博弈 $G(\infty, \delta)$ 中，参与人的一个策略特指在每一阶段，针对其前面阶段所有可能的进行过程，参与人将会选择的行动。

相关重要定义（继续）

- **子博弈**：在有限重复博弈 $G(T)$ 中，由第 $t+1$ 阶段开始的一个子博弈为 G 进行 $T-t$ 次的重复博弈，可表示为 $G(T-t)$ 。由第 $t+1$ 阶段开始有许多子博弈，到 t 阶段为止的每一可能的进行过程之后都是不同的子博弈。在无限重复博弈 $G(\infty, \delta)$ 中，由 $t+1$ 阶段开始的每个子博弈都等同于初始博弈 $G(\infty, \delta)$ ，和在有限情况相似，博弈 $G(\infty, \delta)$ 到 t 阶段为止有多少不同的可能进行过程，就有多少从 $t+1$ 阶段开始的子博弈

相关重要定义（继续）

- **子博弈完美纳什均衡**：如果参与人的策略在每一子博弈中都构成纳什均衡，我们则说纳什均衡是子博弈完美的。